积分方程
简明教程

〔英〕Ll.G.恰贝斯 著
刘家琦 译
林 昣 校

哈尔滨工业大学出版社

前　　言

本书是在近年来我荣幸地为数学系学生讲授课程的基础上写成的。虽然此书是针对数学工作者的需要而写的，我还是力图将过分的数学细节和抽象的内容排除在外，以便不使主题的发展受到影响，从而把有关的一些数学问题归并到附录之中。书中包含了大量精练的例题和练习题，希望对自学者有所帮助。此书是为大学二年级的数学方法课程而编写的。

作者感谢 A.Jeffrey 教授对初稿提出了很多有益的建议。感谢 Ann Drybrough-Smith 女士的关心，感谢 Owen Evans-Jones 先生校阅了书中的证明。我也十分感激 Wales 大学允许我引用它的一些考试题。

目　　录

1. 初 步 概 念

2. 弗雷德霍姆方程

3. 伏尔特拉积分方程

4. 积分方程与变换

5. 近 似 方 法

附 录

参 考 文 献

1. 初步概念

1.1 引　言

读者当然是熟悉微分方程这一概念的。在那里，未知函数是借助于它的导数之间关系确定的。理论上，我们可以从这个关系得到未知函数，常微分方程的解中含有某些任意常数，而偏微分方程的解中则含有任意函数。如果指定了在某点或某个区域上解，或者解的导数，或者是解与其导数的组合所满足的某种关系，那么这个未知函数就被完全地确定了。积分方程是指未知函数出现在积分号下的方程。有时，同一个问题，即可表示为积分方程也可表示为微分方程，但这并非总是能办到的。

为此，考虑由微分方程确定的简单问题

$$y'(x)=y(x), \qquad x\geqslant 0 \tag{1.1}$$

具有条件

$$y(0)=1 \tag{1.2}$$

这个问题的解显然是 $exp\{x\}$。关于 x 积分式（1.1），并利用初始条件式（1.2）则有

$$y(x)-1=\int_0^x y(\xi)d\xi \tag{1.3}$$

这就是由微分方程(1.1)与初始条件变换得到的积分方程。显然，将 $y=exp\{x\}$代入积分方程（1.3）则得到恒等式，所以$exp\{x\}$是积分方程(1.3)的解，因而，积分方程(1.3)可看作是由微分方程（1.1）与初始条件式（1.2）所定义的问题的另一种形式。

因此，某些问题既可以列成微分方程，也可以列成积分

而弦线上距离 O 点为 x 处的下降距离为

$$y = x\eta/\xi \qquad 0\leqslant x\leqslant \xi \tag{1.6a}$$

$$y = (a-x)\eta/(a-\xi) \qquad \xi\leqslant x\leqslant a \tag{1.6b}$$

这两个式子可以写成

$$y = WG(x,\xi)/T \tag{1.7}$$

其中

$$G(x,\xi) = x(a-\xi)/a \qquad 0\leqslant x\leqslant \xi \tag{1.8a}$$

$$= \xi(a-x)/a \qquad \xi\leqslant x\leqslant a \tag{1.8b}$$

现在假设弦线加有每单位长度的重量分布为 $w(x)$ 的连续载荷，那么由于在 $\xi\leqslant x\leqslant \xi+\delta\xi$ 上的重量分布而引起距O点为 x 的点的位移元为

$$\delta y = w(\xi)\delta\xi G(x,\xi)/T \qquad 0\leqslant x,\ \xi\leqslant a \tag{1.9}$$

将其积分便得到由于全部重量分布所引起的位移为

$$y(x) = T^{-1}\int_0^a G(x,\xi)w\xi d\xi \qquad 0\leqslant x\leqslant a \tag{1.10}$$

在这里，弦线的位移借助于重量分布函数给出。然而，这系统也可以从另一角度考虑。假若给出了弦线的位移，那么重量分布如何呢？这个问题的答案就是由积分方积 (1.10) 关于未知函数w 求出的解。此时积分方程的解可以很容易得到，因为方程 (1.10) 可以写成

$$y(x) = (Ta)^{-1}\left[x\int_0^x (a-\xi)w(\xi)d\xi + (a-x)\int_x^a \xi w(\xi)d\xi\right] \tag{1.11}$$

很易验明，式 (1.11) 关于 x 的二次微分得

$$y''(x) = (Ta)^{-1}aw(x)$$

因此

而弦线上距离 O 点为 x 处的下降距离为

$$y = x\eta/\xi \qquad 0 \leqslant x \leqslant \xi \tag{1.6a}$$

$$y = (a-x)\eta/(a-\xi) \qquad \xi \leqslant x \leqslant a \tag{1.6b}$$

这两个式子可以写成

$$y = WG(x,\xi)/T \tag{1.7}$$

其中

$$G(x,\xi) = x(a-\xi)/a \qquad 0 \leqslant x \leqslant \xi \tag{1.8a}$$

$$= \xi(a-x)/a \qquad \xi \leqslant x \leqslant a \tag{1.8b}$$

现在假设弦线加有每单位长度的重量分布为 $w(x)$ 的连续载荷，那么由于在 $\xi \leqslant x \leqslant \xi + \delta\xi$ 上的重量分布而引起距O点为 x 的点的位移元为

$$\delta y = w(\xi)\delta\xi G(x,\xi)/T \qquad 0 \leqslant x,\ \xi \leqslant a \tag{1.9}$$

将其积分便得到由于全部重量分布所引起的位移为

$$y(x) = T^{-1}\int_0^a G(x,\xi)w\xi d\xi \qquad 0 \leqslant x \leqslant a \tag{1.10}$$

在这里，弦线的位移借助于重量分布函数给出。然而，这系统也可以从另一角度考虑。假若给出了弦线的位移，那么重量分布如何呢？这个问题的答案就是由积分方积（1.10）关于未知函数w 求出的解。此时积分方程的解可以很容易得到，因为方程（1.10）可以写成

$$y(x) = (Ta)^{-1}\left[x\int_0^x (a-\xi)w(\xi)d\xi + (a-x)\int_x^a \xi w(\xi)d\xi\right] \tag{1.11}$$

很易验明，式（1.11）关于 x 的二次微分得

$$y''(x) = (Ta)^{-1}aw(x)$$

因此

$$\omega(x)=Ty''(x)$$

这就是积分方程(1.10)的解。

(*b*)　商店库存问题

一商店开始出售某种商品，如果从商店购进该商品后的时刻t未售出的比例 $K(t)$是已知的，那么商店以什么速率购进商品才能使库存保持为常数？（所有过程都认为是连续的）。

假设商店在时刻 $t=0$ 购进了总量为A的商品并开始营业。以后按着速率 $\phi(t)$ 购进商品，在时间区间 $\tau\leqslant t\leqslant\tau+\delta\tau$ 商店购进了 $\phi(\tau)d\tau$ 商品，在时刻 t 未售出的部分为

$$K(t-\tau)\phi(\tau)d\tau$$

则直到时刻 t 全部购进商品尚未售出的总量为

$$AK(t)+\int_0^t K(t-\tau)\phi(\tau)d\tau$$

这是商店的全部库存，它应当等于初始时刻的商品量，即

$$A=AK(t)+\int_0^t K(t-\tau)\phi(\tau)d\tau$$

所要求的进货速率 $\phi(t)$ 就是这个积分方程的解。

(*c*)　静电学中的一个问题

(*a*)　与(*b*) 两段讨论的问题都是一维的。值得指出的是，正如偏微分方程包含有关于多个变量的微分一样，也有这样的积分方程，它含有多个变量的积分。静电学中的一个问题就是这类积分方程的一个十分简单的例子，可以知道，这里不详述[1]。但可以指出如果电荷分布密度为$\rho(r)$，在距离原点很远的地方，电荷密度充分小，那么静电势为

$$V(r)=(4\pi\varepsilon)^{-1}\int\frac{e(r')dr'}{|r-r'|}\qquad(1.12)$$

其中 ε 为介电常数。方程（1.12）可以视为由已知电势分布 $V(r)$ 来确定未知的电荷分布 $\rho(r)$ 的积分方程。事实上，众所周知，这个方程的解是

$$\rho(r) = -\varepsilon\nabla^2 V \tag{1.13}$$

换一种说法，在很远的距离处 V 为充分小的附加条件下，微分方程（1.13）的解由方程（1.12）给出。

(d) 特征值问题

考虑由微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0 \qquad 0\leqslant x\leqslant a \tag{1.14}$$

与边界条件

$$y = 0 \qquad \text{在 } x=0 \text{ 与 } x=a \tag{1.15}$$

所定义的特征值问题。

将方程两边乘以 y，并在 $0\leqslant x\leqslant a$ 上积分得

$$-\int_0^a y\frac{d^2y}{dx^2}dx = \lambda\int_0^a y^2 dx$$

分部积分得

$$\int_0^a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx = \lambda\int_0^a y^2 dx \tag{1.16}$$

这是联系于积分方程的一个特征值问题的例子。由式(1.14)与（1.15）确定的问题的解为

$$y=\sin(n\pi x/a),\ \lambda = n^2\pi^2/a^2,\ n\text{为正整数} \tag{1.17}$$

可以验证它满足式（1.16）

但是同样的微分方程（1.14）对于不同的边界条件

$$\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \text{在 } x=0 \text{与} x=a \tag{1.18}$$

它所对应的 y 的积分方程仍为（1.16），但是解却为

$$y=\cos(n\pi x/a),\ \lambda=n^2\pi^2/a^2,\ n\text{ 为零或正整数} \tag{1.19}$$

可见在考虑积分方程的解时，边界条件是很重要的。读者容易验证，由关系式（1.14）与（1.15）所确定的问题也可以写成下面的形式

$$y(x)+\lambda a^2\int_0^a G(x,\xi)y(\xi)d\xi=0 \tag{1.20}$$

其中 $G(x,\ \xi)$ 由式（1.8）定义。

1.3 常微分方程转换成积分方程

(a) 具有初始条件的线性微分方程（初值问题）

考虑微分方程

$$y''(x)+a_1(x)y'(x)+a_2(x)y(x)=f(x) \tag{1.21}$$

具有初始条件

$$y(0)=y_0,\ y'(0)=y_1 \tag{1.22}$$

在数值分析中，称这类问题为初值问题，因为这类问题的解可以看成是由原点开始的。

设

$$\psi(x)=y''(x) \tag{1.23a}$$

则

$$y'(x)=\int_0^x \psi(u)du+y_1 \tag{1.23b}$$

$$y(x)=\int_0^x (x-u)\psi(u)du+y_1x+y_0 \tag{1.23c}$$

将关系式（1.23）代入微分方程得

$$\psi(x)+\int_0^x [a_1(x)+a_2(x)(x-u)]\psi(u)du$$
$$=f(x)-y_1a_1(x)-y_1xa_2(x)-y_0a_2(x) \tag{1.24}$$

方程（1.24）可以写成下面的形式

$$\psi(x)+\int_0^x K(x,\ u)\psi(u)du=g(x) \qquad (1.25)$$

这是关于 $\psi(x)$ 的积分方程。y 可以通过关系式 (1.22) 与 (1.23) 得到。

这里所指出的概念，可以推广到微分方程

$$\sum_{p=0}^{n} a_{n-p}(x)y^{(p)}(x)=f(x) \qquad (a_0=1) \qquad (1.26)$$

这时要利用下述结果

$$\left[\int_{x_0}^x\right]^n f(\xi)d\xi=\int_{x_0}^x \frac{(x-\xi)^{n-1}}{(n-1)!}f(\xi)d\xi \qquad (1.27)$$

(见附录 A)

例 1.1

写出 $y''+2xy'+y=0$，$y(0)=1$，$y'(0)=0$ 所对应的积分方程。

设

$$y''=\psi$$

$$y'=\int_0^x\psi(u)du, \quad y=\int_0^x(x-u)\psi(u)du+1$$

则

$$\psi+2x\int_0^x\psi(u)du+\int_0^x(x-u)\psi(u)du+1=0$$

因此

$$\psi(x)+\int_0^x(3x-u)\psi(u)du+1=0$$

(b) 斯图姆—刘维尔 (Sturm-Liouville) 问题变换到积分方程

一个有关形式为

$$Ly=\frac{d}{dx}\left\{p(x)\frac{dy}{dx}\right\}-q(x)y \quad x_1\leqslant x\leqslant x_2 \qquad (1.28)$$

的表示式及边界条件

$$a_1y(x_1)+b_1y'(x_1)=0$$
$$a_2y(x_2)+b_2y'(x_2)=0 \tag{1.29}$$

的问题称为斯图姆-刘维尔型。

这里有两个感兴趣的问题

$$Ly=f(x) \qquad x_1\leqslant x\leqslant x_2 \tag{1.30}$$

与

$$Ly+\lambda r(x)y=0 \qquad x_1\leqslant x\leqslant x_2 \tag{1.31}$$

$p(x)$，$q(x)$ 与 $r(x)$ 在区间 $x_1\leqslant x\leqslant x_2$ 上是连续的，此外 $p(x)$ 具有连续导数且不取零值。

微分方程(1.30)对应于由某一力函数 f 所引起的位移 y 。而微分方程 (1.31) 连同边界条件构成一个特征值问题。

在将微分方程变换成积分方程之前，我们考虑微分方程

$$Ly=0 \tag{1.32}$$

的一个性质。假设$\phi_1\phi_2$是这个方程的两个独立解。则

$$\begin{aligned}0&=\phi_2L\phi_1-\phi_1L\phi_2\\&=\phi_2\frac{d}{dx}\left(p\frac{d\phi_1}{dx}\right)-\phi_1\frac{d}{dx}\left(p\frac{d\phi_2}{dx}\right)\\&=\frac{d}{dx}\left\{p\left(\phi_2\frac{d\phi_1}{dx}-\phi_1\frac{d\phi_2}{dx}\right)\right\}\end{aligned}$$

由此得

$$p\left(\phi_2\frac{d\phi_1}{dx}-\phi_1\frac{d\phi_2}{dx}\right)=\text{常数} \tag{1.33}$$

这个关系式后面将用到。

现在考虑微分方程 (1.30) 满足边界条件式 (1.29) 的解。假设 $\phi_1(x)$与 $\phi_2(x)$是微分方程 $Ly=0$ 的两个独立解，

且

$$a_1\phi_1(x_1)+b_1\phi_1'(x_1)=0$$
$$a_2\phi_2(x_2)+b_2\phi_2'(x_2)=0 \tag{1.34}$$

这里假设，方程 $Ly=0$不存在同时满足边界条件式（1.29）的解。这样的解将是微分方程（1.31）对应于零特征值的解。这种情况将另行处理。

应用参数变易法寻求方程（1.30）具有形式为

$$y(x)=z_1(x)\phi_1(x)+z_2(x)\phi_2(x) \tag{1.35}$$

的解，其中 z_1 与 z_2 为待确定的函数。由此推得

$$y'=z_1'\phi_1+z_2'\phi_2+z_1\phi_1'+z_2\phi_2'$$

设

$$z_1'\phi_1+z_2'\phi_2=0 \tag{1.36}$$

则利用 $L\phi_1=L\phi_2=0$，有

$$Ly=\frac{d}{dx}[p(x)\{z_1(x)\phi_1'(x)+z_2(x)\phi_2'(x)\}]$$
$$-q(x)\{z_1(x)\phi_1(x)+z_2(x)\phi_2(x)\}$$
$$=p(z_1'\phi_1'+z_2'\phi_2') \tag{1.37}$$

这样 z_1 与 z_2 可由下面的方程解出

$$z_1'\phi_1+z_2'\phi_2=0$$
$$p(z_1'\phi_1'+z_2'\phi_2')=f$$

它使得由（1.35）所表示的 y 满足边界条件。故

$$z_1'=\frac{f\phi_2}{p(\phi_2\phi_1'-\phi_1\phi_2')},\quad z_2'=-\frac{f\phi_1}{p(\phi_2\phi_1'-\phi_1\phi_2')}$$

由式（1.33）知，上面两个表达式中的分母为常数。对ϕ_1与ϕ_2 进行适当的"量化"（Scaling）可以使分母为 -1，于是

$$z_1'=-f\phi_2\ ,z_2'=f\phi_1 \tag{1.38}$$

由此得

$$z_1(x)=\int_x^{\alpha}\phi_2(\xi)f(\xi)d\xi$$

$$z_2(x)=\int_{\beta}^{x}\phi_1(\xi)f(\xi)d\xi$$

其中未定的积分限等价于任意的积分常数，它由 y 所满足的边界条件确定。利用方程（1.36）得

$$a_1y+b_1y'=a_1(z_1\phi_1+z_2\phi_2)+b_1(z_1\phi_1'+z_2\phi_2')$$

再由

$$a_1\phi_1(x_1)+b_1\phi_1'(x_1)=0$$

得而

$$0=a_1y(x_1)+b_1y'(x_1)=z_2(x_1)[a_1\phi_2(x_1)+b_1\phi_2'(x_1)]$$

现在假设 ϕ_1 与 ϕ_2 都不能同时满足两个边界条件，因此 $z_2(x_1)=0$，且

$$z_2(x)=\int_{x_1}^{x}\phi_1(\xi)f(\xi)d\xi \tag{1.39a}$$

类似地有

$$z_1(x)=\int_x^{x_2}\phi_2(\xi)f(\xi)d\xi \tag{1.39b}$$

从而得

$$y(x)=\int_{x_1}^{x_2}G(x,\ \xi)f(\xi)d\xi \tag{1.40}$$

其中

$$G(x,\ \xi)=\begin{cases}\phi_1(\xi)\phi_2(x) & x_1\leqslant\xi\leqslant x\\ \phi_1(x)\phi_2(\xi) & x\leqslant\xi\leqslant x_2\end{cases} \tag{1.41}$$

$G(x,\ \xi)$ 称为算子 L 在指定边界条件下的格林（Green）函数。它关于变量 x 与 ξ 是对称的。方程（1.40）是关于 f 的积分方程，它的解由微分方程（1.37）给出。

由此立即推知，由微分方程（1.31）以及边界条件式（1.29）定义的特征值问题可变换成积分方程

$$y(x)+\lambda\int_{x_1}^{x_2}G(x,\ \xi)r(\xi)y(\xi)d\xi=0 \tag{1.42}$$

在上面的分析中假设方程 $Ly=0$ 的解 ϕ_1, ϕ_2 不同时满足两个边界条件。现在假设 ϕ 是方程的解且满足两个边界条件，即它是微分方程（1.31）对应于零特征值的特征函数。由于微分方程 $Ly=0$ 是二阶的，因此有两个独立解。假设ψ是第二个解，这个解将不满足任何一个边界条件。那么按前面的讨论可有

$$y(x)=\phi(x)\int_{\alpha}^{x}\psi(\xi)f(\xi)d\xi+\psi(\xi)\int_{x}^{\beta}\phi(\xi)f(\xi)d\xi \tag{1.43}$$

其中 α，β 为任意常数。按前面同样的过程，并注意 y 与 ϕ 满足两个边界条件可得到

$$\begin{aligned}0&=a_1y(x_1)+b_1y'(x_1)\\&=[a_1\psi_1(x_1)+b_1\psi_1'(x_1)]\int_{x_1}^{\beta}\phi(\xi)f(\xi)d\xi\\0&=a_2y(x_2)+b_2y'(x_2)\\&=[a_2\psi_2(x_2)+b_2\psi_2'(x_2)]\int_{x_2}^{\beta}\phi(\xi)f(\xi)d\xi\end{aligned} \tag{1.44}$$

由于 ψ 不满足任何一个边界条件，从第一个方程得到$\beta=x_1$，从第二个方程得

$$\int_{x_1}^{x_2}\phi(\xi)f(\xi)d\xi=0 \tag{1.45}$$

于是仅当 f 与 ϕ有这样的关系时才可能有解，所以积分方程可写为

$$y = A\phi(x) + \int_{x_1}^{x_2} G(x,\xi) f(\xi) d\xi \qquad (1.46)$$

其中 A为一任意常数

$$A = \int_{a}^{x_1} \psi(\xi) f(\xi) d\xi \qquad (1.47)$$

且

$$\begin{aligned} G(x, \xi) &= \phi(\xi)\psi(x) \qquad x_1 \leqslant \xi \leqslant x \\ &= \phi(x)\psi(\xi) \qquad x \leqslant \xi \leqslant x_2 \end{aligned} \qquad (1.48)$$

这样在 f 的积分方程中就包含有任意常数这样的不确定项。

例 1.2

找出由下式

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = f(x) \qquad 0 \leqslant x \leqslant \pi/4$$

$$y(0) = 0 \qquad y(\pi/4) = 0$$

定义的问题所对应的积分方程。

显然

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0$$

满足在 $x=0$ 与 $x=\pi/4$ 处的边界条件的解分别为 $\sin 2x$ 与 $\cos 2x$。它们都不能同时满足两个边界条件。

设

$$y = \omega \sin 2x + z \cos 2x$$

$$\begin{aligned} y' &= \omega' \sin 2x + z' \cos 2x + 2\omega \cos 2x - 2z \sin 2x \\ &= 2\omega \cos 2x - 2z \sin 2x \end{aligned}$$

若

$$\omega' \sin 2x + z' \cos 2x = 0$$

$$y'' = 2\omega' \cos 2x - 2z' \sin 2x - 4\omega \sin 2x - 4z \cos 2x$$

所以方程

$$y'' + 4y = f$$

变为

$$2\omega' \cos 2x - 2z' \sin 2x = f$$

因此

$$z' = -\frac{1}{2} f \sin 2x, \quad \omega' = \frac{1}{2} f \cos 2x$$

进而

$$2y = \sin 2x \int^{x} \cos 2\xi f(\xi) d\xi + \cos 2x \int_{x} \sin 2\xi f(\xi) d\xi$$

其中积分限还未确定。

$$y' = \cos 2x \int^{x} \cos 2\xi f(\xi) d\xi - \sin 2x \int_{x} \sin 2\xi f(\xi) d\xi$$

由$y(0) = 0$ 可知第二个积分中未定的积分限为零。类似地，由 $y(\pi/4) = 0$ 可得第一个积分中未定的积分限为$\pi/4$。故有

$$y(x) = \int_{0}^{\pi/4} G(x,\xi) f(\xi) d\xi$$

其中

$$G(x,\xi) = -\frac{1}{2}\cos 2\xi \sin 2x \qquad 0 \leqslant x \leqslant \xi$$

$$= -\frac{1}{2}\cos 2x \sin 2\xi \qquad \xi \leqslant x \leqslant \pi/4$$

例 1.3

将由下式

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda y = 0$$

$$y(0) = 0, y'(1) = 0$$

定义的问题变换成积分方程的形式。

事实上这个问题的答案是

$$y=\sin\frac{(2r-1)\pi x}{2},\lambda=\left[\frac{(2r-1)\pi}{2}\right]^2$$

r 为正整数。

方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}=0$$

满足边界条件的两个解分别是 $y=x$ 与 $y=1$。

按照通常的程序，方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}=f(x)$$

满足指定的边界条件的解是

$$y=x\int_1^x f(\xi)d\xi+\int_x^0 \xi f(\xi)d\xi$$

所以积分方程为

$$y(x)=\lambda\int_0^1 K(x,\ \xi)y(\xi)d\xi$$

其中

$$\begin{aligned}K(x,\ \xi)&=x &\quad 0\leqslant x\leqslant\xi\\ &=\xi &\quad \xi\leqslant x\leqslant 1\end{aligned}$$

例 1.4

将由下式

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y=f(x)$$

与边界条件 $y(0)=y(\pi)=0$ 所定义的问题变换成积分方程，并指出 $f(x)$ 应当满足的条件。

显然 $\sin x$ 满足微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$$

与两个边界条件。

这个微分方程的第二个解是 $\cos x$，但它不满足任何一个边界条件，

设
$$y = z\sin x + w\cos x$$
按照例 1.2 同程的过程得
$$y = \sin x\int^{x} \cos\xi f(\xi)d\xi + \cos x\int_{x} \mathrm{sis}\xi f(\xi)d\xi$$
因 $y(0)=0$，故第二个积分中未确定的积分限为零。

在 $x=\pi$ 点，y 为零，因而可得
$$y(\pi) = \cos\pi\int_{\pi}^{0} \sin\xi f(\xi)d\xi$$
这样，若存在解必有
$$\int_{0}^{\pi} \sin\xi f(\xi)d\xi = 0$$
且
$$y(x) = A\sin x + \int_{0}^{\pi} G(x,\ \xi) f(\xi)d\xi$$
其中 A 为任意常数，而
$$\begin{aligned} G(x,\ \xi) &= -\sin\xi\cos x \qquad 0\leqslant\xi\leqslant x \\ &= -\sin x\cos\xi \qquad x\leqslant\xi\leqslant\pi \end{aligned}$$

1.4 线性积分方程的分类

(a) 弗雷德霍姆方程

在我们讨论积分方程（本书将主要考虑线性积分方程）的理论之前，首先给出某些定义，并引入线性积分方程的分类。下面将用 ϕ 表示积分方程中的未知函数，f 表示已知函数。

积分方程

$$\int_a^b K(x,\ y)\phi(y)dy = f(x) \tag{1.49}$$

称为第一类弗雷德霍姆积分方程。而积分方程

$$\phi(x) = \lambda\int_a^b K(x,y)\phi(y)dy + f(x) \qquad a\leqslant x\leqslant b \tag{1.50}$$

称为第二类弗雷德霍姆积分方程。上式可以不包含 λ，但从发展积分方程理论的角度看，引进 λ 是方便的。积分方程

$$\phi(x) = \lambda\int_a^b K(x,y)\phi(y)dy \qquad a\leqslant x\leqslant b \tag{1.51}$$

称为齐次第二类弗雷德霍姆积分方程。这是一个特征值问题，不同的特征值 λ_r，对应于不同的特征函数 $\phi_r(x)$。显然，若方程（1.50）存在多个解，那么这些解之差将满足方程（1.51）。因此对于一个给定的 λ 值，使它即是特征值，又使方程（1.50）有唯一解这是不可能的。

量 $K(x,\ y)$称为积分方程的核。在方程（1.49）中核定义在 $a\leqslant y\leqslant b$ 上，x 的定义域与 $f(x)$ 的定义域相同。在方程（1.50）与（1.51）中核定义在 $a\leqslant x\leqslant b$，$a\leqslant y\leqslant b$ 上。如果积分核的任何一个变量的定义域为无穷或者积分核在定义域内有奇异性，则称积分方程为奇异的。若在一定条件下，这个奇异性可通过变量代换去掉，则称积分核为弱奇异性的。假设

$$K(x,y) = H(x,y)|y-x|^{-\alpha} \qquad (\alpha>0) \tag{1.52}$$

其中H 是连续的且在感兴趣的任一点上都是有限的。进而假设 ϕ是有界的。

$$\int_a^b K(x,y)\phi(y)dy = \int_a^x H(x,\ y)(x-y)^{-\alpha}\phi(y)dy$$

$$+\int_x^b H(x,\ y)(y-x)^{-\alpha}\phi(y)dy$$

考虑第一个积分，并令 $x-y=\eta^{\nu}$，$x-a=\xi^{\nu}$，则

$$\int_a^x H(x,\ y)(x-y)^{-\alpha}\phi(y)dy$$

$$=-\nu\int_0^{\xi} H(x,\ x-\eta^{\nu})\phi(x-\eta^{\nu})\eta^{\nu(1-\alpha)-1}d\eta \qquad (1.53)$$

积分包含因子 $\eta^{\nu(1-\alpha)-1}$。指数 $\nu(1-\alpha)-1$为正数，假若$\alpha<1$且 $\nu>(1-\alpha)^{-1}$。所以若 $0<\alpha<1$ ，用适当的变换可将奇异积分变换成一个无奇异性的积分。同样的处理方法可应用到区间$x\leqslant y\leqslant b$上的积分。因此为了多种目的可将弱奇异性核处理为非奇异性的。以后我们将假设已经进行了这种变换。同样可证明，当 $\alpha<\frac{1}{2}$时，形如式（1.52）的积分核

$$\int_a^b\{K(x,y)\}^2dy \qquad (1.54)$$

是有限的。

注意，方程（1.49），（1.50）与（1.51）可以分别写成算子的形式

$$K\phi=f \qquad (1.55)$$

$$\phi=\lambda K\phi+f \qquad (1.56)$$

$$\phi=\lambda K\phi \qquad (1.57)$$

这些表达式在后面求解时将是有用的。注意，在方程(1.57)中 $\mu=\lambda^{-1}$ 为算子 K 的特征值。因此有时将式（1.57）写成

$$K\phi=\mu\phi \qquad (1.58)$$

的形式是方便的。然而，在积分方程的著作中常用 λ 而不是 μ 作为特征值，本书也采用这种习惯用法。

若 $$K(x,\ y)=K(y,\ x) \qquad (1.59)$$

则称核为对称的，

若 $$K(x, y) = -K(y, x) \tag{1.60}$$

则称核为反对称的；

若 $$K(x, y) = \overline{K}(y, x) \tag{1.61}$$

则称核为埃尔米特的。

类似于矩阵代数还可以给出其他的定义，但是就本书所论及的内容，上面的定义已足够了。可以看出方程（1.55）（1.56）与（1.57）能用矩阵代数表示，而且在弗雷德霍姆积分方程的理论中，有很多结果类似于矩阵代数理论的结果。

若

$$K(x, y) = \sum_{r=1}^{n} a_r(x) b_r(y), \quad n \text{ 为有限数} \tag{1.62}$$

则称核 K 为可分离的或退化的。

(b) 伏尔特拉积分方程

若 $$K(x, y) = 0, \quad y > x \tag{1.63}$$

则称 $K(x, y)$ 为伏尔特拉型核。积分方程

$$\int_a^x K(x, y)\phi(y)dy = f(x) \qquad a \leqslant x \tag{1.64}$$

称为第一类伏尔特拉积分方程。

若 $$K(x, y) = K(y - x)$$

则称 $K(x, y)$ 为卷积核。

积分方程

$$\phi(x) = \lambda\int_a^x K(x, y)\phi(y)dy + f(x) \quad a \leqslant x \tag{1.65}$$

称为第二类伏尔特拉积分方程。一般情况下，第一类伏尔特拉积分方程可以化为第二类伏尔特拉积分方程。为此，将积分方程（1.64）对 x 求导，得

$$K(x,\ x)\phi(x)+\int_a^x \frac{\partial K(x,y)}{\partial x}\phi(y)dy=f'(x)$$

若 $K(x,x)$ 不为零，可用它遍除等式各项，便得到了相伴的第二类伏尔特拉积分方程。

若 $K(x,\ x)$ 恒为零，则得到的是另一个不同的第一类伏尔特拉积分方程。

积分方程

$$\phi(x)=\lambda\int_a^x K(x,y)\phi(y)dy \tag{1.66}$$

称为齐次第二类伏尔特拉积分方程。可以证明，若 $K(x,y)$ 连续，则它只可能有零这样一个平凡的连续解。由附录 C知，若 K连续，ψ 有界，则

$$\int_a^b K(x,\ y)\psi(y)dy$$

是连续的。

所以，由方程 (1.66) 定义的ϕ如果它是有界的则必连续。设

$$|K(x,\ y)|\leqslant M \tag{1.67}$$

设 b 是使 $(b-a)|\lambda|M<1$ 成立的一个数，取 $a\leqslant x\leqslant b$，则

$$(x-a)|\lambda|M<1 \tag{1.68}$$

由 (1.66) 得

$$|\phi(x)|\leqslant(x-a)|\lambda|M|\phi(x)|<|\phi(x)| \tag{1.69}$$

这只有当 $\phi(x)$ 在 $a\leqslant x\leqslant b$ 上恒等于零时才有可能。

例 1.5

证明积分方程

$$x\phi(x)=\lambda\int_0^x exp\{x-y\}\phi(y)dy,\quad 0\leqslant y$$

具有特征值的连续谱，且特征函数在 $0\leqslant x$ 上无界。

这是一个具有奇异核$x^{-1}exp\{x-y\}$ 的第二类齐次伏尔特拉方程。很明显，令

$$\psi(y)=exp\{-y\}\phi(y)$$

则

$$x\psi(x)=\lambda\int_0^x\psi(y)dy$$

它的解显然是 $\psi(x)=x^{\lambda-1}$，因而右端的积分存在。由此得到 λ 的实部必须为正。因此 $\phi(x)=x^{\lambda-1}expx$，其中 λ 为具有正实部的任意量。这就给出了 λ 值的一个连续谱，同时 $\phi(x)$ 对正的 x 无界。

1.5 积分——微分方程

物理问题化归为数学形式之后常常导致了积分——微分方程。例如一圆盘在地下水爆裂的初期它的畸变率 u 遵循这样形式的方程

$$\frac{du}{dt}+\alpha u+\beta\int_0^t(1-t'^2/t_1^2)^{\frac{1}{2}}u(t-t')dt'=\nu exp\{-t/t_2\} \tag{1.70}$$

这里，量 u 既出现在关于时间 t 的导数中，也出现在一个积分号下。当我们将一微分方程变换到积分方程的过程中，也可以出现积分——微分方程作为中间步骤。考虑微分方程

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\omega^2y=f\cos\Omega t \qquad 0\leqslant t \tag{1.71}$$

具有初始条件

$$y=0,\ \frac{dy}{dt}=0,\ 在\ t=0\ 时 \tag{1.27}$$

借助于 1.3(a) 中介绍的方法，可以将其变成积分方程，然而若方程 (1.71) 只对时间 t 积分一次，它变为

$$\frac{dy}{dt}+\omega^2\int_0^t y(t')dt'=f\Omega^{-1}\sin\Omega t \tag{1.73}$$

现在只有一个初始条件，在 $t=0$ 时 $y=0$，是需要的。方程 (1.73) 包含 y 的导数，同时 y 又出现在积分号下，它是一个积分——微分方程。

通常，积分——微分方程可依照我们所期望的那样既可用微分方程去处理，也可用积分方程去处理。后面将不再提及它们。有时，正如下例所示，它们的求解方法是一目了然的。

例 1.6

求方程

$$u'(x)+\int_0^1 exp\{x-y\}u(y)dy=f(x)\quad 0\leqslant x\leqslant 1$$

在 $u(0)=0$下的解 (Wales)*

这方程可重新写成

$$u'(x)+expx\int_0^1 exp(-y)u(y)dy=f(x)$$

令

$$g(x)=\int_0^x f(\xi)d\xi,\quad K=\int_0^1 exp(-y)u(y)dy$$

积分之，得到

$$u(x)+K(expx-1)=g(x)$$

* 这里指 Wales 大学的考试题，下同（译注）

且

$$u(x)=g(x)+K(1-\exp x)$$

又有

$$\begin{aligned}K&=\int_0^1 \exp(-y)u(y)dy\\&=\int_0^1 \exp(-y)g(y)dy+K\int_0^1\{\exp(-y)-1\}dy\\&=\int_0^1 \exp(-y)g(y)dy-Ke^{-1}\end{aligned}$$

因此

$$K=[e/(e+1)]\int_0^1 \exp(-y)g(y)dy$$

练　　习

1．将下面关于 y 的微分方程化为关于 f 的积分方程

$y''+y=f$，当 $x=0$ 与 $x=\pi/2$ 时，$y=0$。

2．将下面关于 y 的微分方程化为积分方程

$y''-\lambda y=\cos x$，在$x=0$ 处，$y=0$，在$x=1$处，$y'=0$　$\lambda>0$。

3．若 $G(x,\xi)=\sinh x\sinh(\xi-a)\operatorname{cosech} a\quad 0\leqslant x\leqslant\xi$

$\qquad\qquad=\sinh\xi\sinh(x-a)\operatorname{cosech} a\quad \xi\leqslant x\leqslant a$

求一个微分方程及边界条件，使它等价于积分方程

$$y(x)=\int_0^a G(x,\ \xi)f(\xi)d\xi$$

4．求积分方程

$$x^2\phi(x)=\lambda\int_0^x[a(y)/a(x)]\phi(y)dy$$

所有可能的特征值与特征函数。

5．证明具有任意初始条件的常系数线性微分方程可以变换成具有卷积核的第二类伏尔特拉积分方程。

6. 验证积分方程

$$\phi(x)=\int_0^x t^{x-t}\phi(t)dt \qquad 0\leqslant x$$

有不连续的解x^{x-1}。

7. 证明，若

$$\frac{d}{dx}\left\{p(x)\frac{dy}{dx}\right\}-q(x)y=f(x) \qquad a\leqslant x\leqslant b$$

且y满足边界条件

$$\alpha_2 y(a)+\alpha_2 y'(a)+\alpha_3 y(b)+\alpha_4 y'(b)=0$$

$$\beta_1 y(a)+\beta_2 y'(a)+\beta_3 y(b)+\beta_4 y'(b)=0$$

则存在一关于$f(x)$的积分方程

$$y(x)=\int_a^b G(x,\ \xi)f(\xi)d\xi$$

若

$$P(b)\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}=P(a)\begin{vmatrix}\alpha_3 & \alpha_4\\ \beta_3 & \beta_4\end{vmatrix}$$

则$G(x,\ \xi)$关于x与ξ是对称的。

若 $y(a)=y(b)$、$y'(a)=y'(b)$，$P(a)=P(b)$

则G也是对称的。

8. 证明关于$\phi(x)$的积分方程

$$f(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x)\cos\omega x dx$$

的解是

$$\phi(x)=\frac{1}{a\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\omega)\cos\omega x d\omega$$

只需该积分存在。

9. 解积分方程

$$x^a=\int_0^x(x-\xi)^\beta\phi(\xi)d\xi \qquad (\beta\text{为整数}) \qquad 0\leqslant x$$

并说明 α，β 取何值时解存在，（提示，应用附录A的结论。）

10．利用将第一类积分方程化为第二类的方法，求解第一类积分方程

$$\int_0^x e^{x-t}\phi(t)dt = f(x), \quad f(0)=0, \quad 0\leqslant x$$

11．解积分方程

$$\int_0^x \sin\omega(x-\xi)\phi(\xi)d\xi = f(x) \qquad 0\leqslant x$$

其中 $\qquad f(0)=0, \quad f'(0)=0$。

2. 弗雷德霍姆方程

2.1 与矩阵代数的类比

考虑三个积分方程

$$f(x)=\int K(x,\ y)\phi(y)dy \tag{2.1}$$

$$\phi(x)=\lambda\int K(x,\ y)\phi(y)dy \tag{2.2}$$

$$\phi(x)=\lambda\int K(x,\ y)\phi(y)dy+f(x) \tag{2.3}$$

积分区域与所包含的函数定义域皆为 $a\leqslant x,\ y\leqslant b$。除非必要，将不指明积分限。在实际讨论这些方程解之前，引进这些方程的简单逼近并讨论这种逼近将是有益的。据此将得到积分方程具有什么样的性质，尽管通常只是指出这些性质而不予以证明。下面假定方程是非奇异的。

设 n 为整数，P 与 q 是小于 n 的正整数。

令

$$h=\frac{b-a}{n}>0$$

当 n 趋向无穷时，h 趋向零，因而有理由期望逼近会越来越好。

$$x_p=a+\left(p-\frac{1}{2}\right)h,\qquad y_q=a+\left(q-\frac{1}{2}\right)h$$

$$f(x_p)=f_p,\ \phi(x_p)=\phi_p,\ K(x_p,\ y_q)=k_{pq}$$

由于 $h\sum\limits_{q=1}^{n}g_q$ 是 $\int g(y)dy$ 的一个近似，因此关于 ϕ_q 的方程组

$$f_p = h\sum_{q=1}^{n} k_{pq}\phi_q \qquad 1\leqslant p\leqslant n \qquad (2.4)$$

$$\phi_p = \lambda h\sum_{q=1}^{n} k_{pq}\phi_q \qquad 1\leqslant p\leqslant n \qquad (2.5)$$

$$\phi_p = \lambda h\sum_{q=1}^{n} k_{pq}\phi_p + f_p \qquad 1\leqslant p\leqslant n \qquad (2.6)$$

就是关于 $\phi(y)$ 的积分方程 (2.1) (2.2) 与 (2.3) 的近似。方程 (2.4) (2.5) 与 (2.6) 可以分别转写成矩阵形式

$$F = hK\Phi \qquad (2.7)$$

$$\Phi = \lambda hK\Phi \qquad (2.8)$$

$$\Phi = \lambda hK\Phi + F \qquad (2.9)$$

其中 K 为具有元素 k_{pq} 的 $n\times n$ 方阵，F 与 Φ 为分别具有 n 个元素 f_p、ϕ_p 的列矩阵。

现在考虑这些矩阵方程的性质[2]。方程 (2.7) 有唯一解

$$\Phi = (hK)^{-1}F$$

假若 K 是一个非奇异矩阵。然而，若 K 是奇异的，它的秩小于它的阶，且它的某些行与其它行是线性相关的。如果 F 的相应元素也存在这种相同的关系，则方程将有无穷组解[3]。反之，方程是不相容的，无解。因此它给我们一个提示，表明方程 (2.1) 可能有唯一解或无穷多解，也可能没有任何解。

现在考虑方程 (2.8)，它可重新写为

$$hK\Phi = \mu\Phi, \quad \mu = \lambda^{-1}$$

若 K 为非奇异的，则它有 n 个特征向量 Φ_r 与 n 个与之相应的非零特征值，可以假设这些特征值都不相同。当不是这种情况时，理论将作适当的修改。若矩阵是奇异的，且秩

$m<n$，则有 $n-m$ 个特征向量对应于零特征值。注意，特征向量 Ψ 由方程

$$\Psi^T hK = \mu \Psi^T$$

的解给出，其中上标 T 表示转置。通常 Ψ 与 Φ 是不同的，除非矩阵 K 是对称的。然而，特征值总是相同的。

某些正交关系，可证明如下：假设 Ψ_r 与 Φ_s 分别为对应于非零的不等的特征值 μ_r 与 μ_s 的特征向量

$$\Psi_r{}^T h^2 K \Phi_s = \Psi_r{}^T h \mu_s \Phi_s = (\mu_s/\mu_r) \Psi_r{}^T h^2 K \Phi_s$$

它仅当量

$$\Psi_r{}^T h^2 K \Phi_s = \Psi_r{}^T h^2 \Phi_s \qquad (2.10)$$

为零时才成立。利用通常的正交化过程，这个结论对特征值相等的情况也是成立的。进而，我们总可以通过尺度变化使

$$h\Psi_r{}^T \Psi_r = h\Phi_s{}^T \Phi_s = 1 \qquad (2.11)$$

当完成了这个规范化之后，显然

$$\Psi_s{}^T hK \Phi_s = \mu_s = \lambda_s{}^{-1} \qquad (2.12)$$

假设 Q 是任一具有 n 个元素的列矩阵

令

$$Q = \sum_{s=1}^{n} q_s \Phi_s$$

则

$$h\Psi_r{}^T Q = \sum_{s=1}^{n} q_s h \Psi_r{}^T \Phi_s = q_r$$

从而

$$Q = \sum_{s=1}^{n} h \Psi_s{}^T Q \Phi_s$$

$$q_r = \lambda_r h \Psi_r{}^T K Q$$

现在考虑方程组（2.9）的解

$$\Phi = \lambda h K \Phi + F$$

若λ不是方程组

$$\Phi=\lambda hK\Phi$$

的特征值，即

$$D_0(\lambda)=|I-\lambda hK|\neq 0 \tag{2.13}$$

（I为n阶单位阵）则方程组（2.6）有唯一解。

$D_0(\lambda)$是n阶行列式，它可展成λ的n次多项式，其常数项为1。当λ为方程组（2.8）的一个特征值时$D_0(\lambda)=0$。

这样

$$D_0(\lambda)=\prod_{s=1}^{n}(1-\lambda/\lambda_s)=\prod_{s=1}^{n}(1-\mu_s/\mu)$$

其中λ_s是方程组的特征值，我们不妨假定

$$|\lambda_1|\leqslant\lambda_2|\leqslant\cdots|\lambda_n|$$

相应地有

$$|\mu_1|\geqslant|\mu_2|\geqslant\cdots|\mu_n|$$

以后，在本书中我们将采用这种约定。

求形如

$$\Phi=\sum_{r=1}^{n}y_r\Phi_r$$

的解，其中Φ_r是齐次方程组的特征向量。

现在

$$F=\sum_{r=1}^{n}\xi_r\Phi_r,\qquad \text{其中}\ \xi_r=\Psi_r^TF$$

因之

$$\sum_{r=1}^{n}y_r\Phi_r=\lambda h\sum_{r=1}^{n}y_rK\Phi_r+\sum_{r=1}^{n}\xi_r\Phi_r$$

因

$$y_r\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_r}\right)=\xi_r$$

故

$$y_r = \frac{\xi_r}{(1-\lambda/\lambda_r)} = \xi_r + \frac{\lambda\xi_r}{\lambda_r - \lambda} = \xi_r + \frac{\lambda\lambda_r \Psi_r{}^T hKF}{\lambda_r - \lambda}$$

于是

$$\Phi = F + \lambda \sum_{r=1}^{n} \frac{\Psi_r{}^T hKF}{1-\lambda/\lambda_r} \Phi_r$$

$$= F + \lambda\{D_0(\lambda)\}^{-1} \sum_{r=1}^{n} \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq r}}^{n} (1-\lambda/\lambda_s) \Psi_r{}^T hKF\Phi_r \quad (2.14)$$

显然，它可写成

$$\phi_p = f_p - \lambda\{D_0(\lambda)\}^{-1} \sum_{q=1}^{n} hd_{pq}(\lambda) f_q \quad (2.15)$$

其中 $d_{pq}(\lambda)$ 为 λ 的 $n-1$ 次多项式。若 λ 是一特征值，例如 λ_t，则 $\lambda\xi_t/(\lambda_t-\lambda)$将是一个无穷大，除非 $\xi_t = \Psi_t{}^T F$ 等于零，即此刻有一不定型。并且此时的解为 $C\Phi_t$，其中C为任意数量因子。

还有另一种方法解方程

$$\Phi = \lambda hK\Phi + F$$

考虑向量序列

$$\Phi^{(0)} = F$$

$$\Phi^{(r+1)} = \lambda hK\Phi^{(r)} + F$$

不难得到

$$\Phi^{(r)} = \sum_{s=0}^{r} \lambda^s h^s K^s F$$

由于

$$F + \lambda hK\Phi^{(r)} - \Phi^{(r)} = \lambda^{r+1} h^{r+1} K^{r+1} F$$

若等式右边趋向于零，则 $\Phi^{(r)}$ 将趋向于方程

$$F + \lambda hK\Phi - \Phi = 0$$

的解。

又

$$F = \sum_{p=1}^{n} \xi_p \Phi_p$$

因此

$$\lambda^{r+1} h^{r+1} K^{r+1} F = \sum_{p=1}^{n} \left(\frac{\lambda}{\lambda_p}\right)^{r+1} \Phi_p$$

它将趋向于零，假若

$$|\lambda| < |\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant \cdots \lambda_n|$$

这样，若$|\lambda| < |\lambda_1|$，则

$$\Phi = \sum_{s=0}^{\infty} \lambda^s h^s K^s F \tag{2.16}$$

给出方程的一个解，它形式地等价于关系式

$$\Phi = (I - \lambda h K)^{-1} F$$

另一个表达方式是

$$\Phi = F - \lambda h R F \tag{2.17}$$

其中

$$R = -K(I - \lambda h K)^{-1} = -\sum_{s=0}^{\infty} \lambda^s h^s K^{s+1} F \tag{2.18}$$

为了说明积分方程的解可能具有的性质，下面的解释可能是有用的。由下式定义的列矩阵

$$hAB$$

的元素（其中A为方阵，B为列矩阵）是

$$h \sum_{q=1}^{n} a_{pq} b_q = h \sum_{q=1}^{n} A(x_p, y_q) B(y_q) \tag{2.19}$$

a_{pq} 是函数 $A(x, y)$在点 (x_p, y_q) 处的值，b_q是函数$B(y)$在 y_q 点处的值，$A(x, y)$ 与 $B(y)$ 为某两个适当的函数，因此表达式 (2.19) 是

$$\int A(x_p, y) B(y) dy$$

的一个近似。从这些附注以及前面的讨论可得出积分方程的解的下列性质。

(a) 方程

$$f(x)=\int K(x,y)\phi(y)\,dy$$

有唯一解，只要不存在任何函数 $\Psi(y)$ 使

$$\int K(x,\ y)\Psi(y)dy=0 \tag{2.20}$$

(b) 存在无穷多个 K 的特征函数 $\Phi_s(y)$，$\Psi_s(x)$ 与特征值 λ_s 使

$$\lambda_s\int K(x,y)\Phi_s(y)dy=\Phi_s(x) \tag{2.21}$$

$$\lambda_s\int \Psi_s(x)K(x,\ y)dx=\Psi_s(y) \tag{2.22}$$

若 K 是关于 x，y 对称的，Φ_s 与 Ψ_s 相同，且 Φ_s 与 Ψ_s 可被规范化，即

$$\int \Psi_r(x)\Phi_s(x)dx=\delta_{rs} \tag{2.23}$$

$$\iint \Psi_r(x)K(x,\ y)\Phi_s(y)dxdy=\lambda_s^{-1}\delta_{rs}=\mu_s\delta_{rs} \tag{2.24}$$

其中

$$\delta_{rs}=\begin{cases}1 & r=s\\ 0 & r\neq s\end{cases}$$

某些 μ_s 可能为零。

方程 (2.10)，(2.11) 与 (2.12) 是方程 (2.23) 与 (2.24) 的近似。

(c) 积分方程

$$\phi(x)=\lambda\int K(x,\ y)\phi(y)dy+f(x)$$

具有形式为

$$\phi(x)=f(x)-\lambda\int R(x,y;\ \lambda)f(y)dy \qquad (2.25)$$

的唯一解，除非λ是一个特征值。$R(x, y;\lambda)$ 具有形式 $D(x,y;\ \lambda)/D_0(\lambda)$，其中

$$D_0(\lambda)=\prod_{r=1}^{\infty}(1-\lambda/\lambda_r)$$

λ_r 为特征值。$D(x,y;\ \lambda)$ 可以表示为λ的幂级数。方程（2.15）为方程（2.25）的近似。

若λ为某一特征值 λ_t，则仅当

$$\int f(x)\Psi_t(x)dx=0 \qquad (2.26)$$

时解存在。此时解具有 $C\Phi_t(x)$ 的不定量，其中 C为任意常数。

当$|\lambda|<|\lambda_1|$时，其中 λ_1 为最小特征值，收敛解的另一个表达式是

$$\phi(x)=f(x)+\int\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n K_n(x,\ y)f(y)dy \qquad (2.27)$$

其中 $K_n(x,y)$ 由

$$K_n(x,y)=\int K_{n-1}(x,\ z)K(z,y)dz \qquad n>1$$

$$=K(x,\ y) \qquad n=1$$

所定义。方程（2.16）是方程（2.27）的近似。

2.2 退化核

考虑下面形式的核

$$K(x,y)=\sum_{p=1}^{n}a_p(x)b_p(y)$$

其中n为有限数，且 a_r 与 b_s 各构成一个线性独立系（否

则，项数将减少）。具有这种特性的核称为退化核。

考虑第一类积分方程

$$f(x)=\int K(x,\ y)\phi(y)dy$$

$$=\sum_{p=1}^{n} a_p(x)\int b_p(y)\phi(y)dy \qquad (2.28)$$

可以立即得到下面两个结论：

(a) 解不存在，除非 $f(x)$ 可表示为

$$\sum_{p=1}^{n} f_p a_p(x) \qquad \text{[illegible]}$$

这是方程自相容的基础。

(b) 方程的解由于任意函数 $\psi(y)$ 而不确定，其中 $\psi(y)$ 在积分区间上同所有的 $b_p(y)$ 正交。当 n 为有限时，这样的函数总可构造出来。因此在求方程的解时仅去找最简单的解是方便的，但必须验证方程是自相容的。

例 2.1

积分方程

$$exp2x=\int_0^{\pi}\sin(x+y)\phi(y)dy \qquad 0\leqslant x\leqslant\pi$$

非自相容，因此无解。这是因为

$$\int_0^{\pi}\sin(x+y)\phi(y)dy$$

$$=\sin x\int_0^{\pi}\cos y\,\phi(y)dy+\cos x\int_0^{\pi}\sin y\,\phi(y)dy$$

它具有

$$A\sin x+B\cos x$$

的形式。

例 2.2

积分方程

$$3\sin x+2\cos x=\int_{-\pi}^{\pi}\sin(x+y)\phi(y)dy \qquad -\pi\leqslant x\leqslant\pi$$

的解中所含有的任意函数具有下面的形式

$$\psi(y)=c_0+\sum_{n=2}^{\infty}(c_n\cos ny+d_n\sin ny)$$

因为

$$\int_{-\pi}^{\pi}\psi(y)\sin(x+y)dy=0$$

一般的求解方法如下。若解存在时，可找下面形式的解

$$\phi(y)=\sum_{q=1}^{n}\phi_p b_q(y)$$

它是方程的解，并且可以在其上再加上 $\psi(y)$ 。这类似于微分方程理论中的余函数与特殊积分的概念。求解 的 过 程 如下：

$$\sum_{p=1}^{n}f_p a_p(x)=\sum_{p=1}^{n}a_p(x)\int b_p(y)\sum_{q=1}^{n}\phi_q b_q(y)dy$$

$$=\sum_{p=1}^{n}a_p(x)\sum_{q=1}^{n}\beta_{pq}\phi_q$$

其中

$$\beta_{pq}=\int b_p(y)b_q(y)dy$$

因此 ϕ_s 被定义为

$$f_p=\sum_{q=1}^{n}\beta_{pq}\phi_q \qquad 1\leqslant r\leqslant n$$

由于 b_p 线性无关，行列式 $|\beta_{pq}|$ 不为零， 故可唯一 地 解 出 ϕ_q。这个解可称为特解，$\psi(y)$ 称为余函数。

例 2.3

解积分方程

$$3\sin x + 2\cos x = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x+y)\phi(y)dy \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi$$

由于 $\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$，方程是相容的，求下面形式的解

$$\phi(y) = A\cos y + B\sin y$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x+y)\phi(y)dy = \sin x \int_{-\pi}^{\pi} \cos y(A\cos y + B\sin y)dy$$

$$+ \cos x \int_{-\pi}^{\pi} \sin y(A\cos y + B\sin y)dy$$

$$= \pi A\sin x + \pi B\cos x$$

因此 $A = 3/\pi$，$B = 2/\pi$，方程的特解是

$$\phi(y) = (3\cos y + 2\sin y)/\pi$$

如同例 2.2 中指出的那样，这个方程的余函数为

$$c_0 + \sum_{n=2}^{\infty} (c_n \cos ny + d_n \sin ny)$$

例 2.4

解积分方程

$$3x^2 + 4x = \int_{-1}^{+1} (6x^2y + 4xy^2)\phi(y)dy \quad -1 \leqslant x \leqslant 1$$

列出 x 的等幂方程得

$$1 = 2\int_{-1}^{+1} y\phi(y)dy$$

$$1 = \int_{-1}^{+1} y^2\phi(y)dy$$

不存在 x 的其他幂次，所以方程是相容的。这里不易看出余函数的明显的形式，我们借助于勒让德 (Legendre) 多项式的展开形式来考虑。这之所以方便，是因为它们在 $-1 \leqslant y \leqslant 1$ 上是正交的。现在

$$y = p_1(y)$$

$$y^2 + \frac{2p_2(y) + p_0(y)}{3}$$

由于勒让德多项式的正交性质，函数序列

$$p_0(y) - \frac{2}{5}p_2(y), \quad p_n(y) \qquad n \geqslant 3$$

在 $-1 \leqslant y \leqslant 1$ 上与 y 和 y^2 是正交的，因此余函数是

$$c_0\Big(p_0(y) - \frac{2}{5}p_2(y)\Big) + \sum_{n=3}^{\infty} c_n p_n(y)$$

由于 y 和 y^2 是正交的，特解很容易得到。

令

$$\phi(y) = \phi_1 y + \phi_2 (y^2/2)$$

则

$$1 = 2\int_{-1}^{+1} y[\phi_1 y + \phi_2 y^2/2]dy = 2\phi_1 \int_{-1}^{+1} y^2 dy$$

$$1 = 2\int_{-1}^{+1} y^2(\phi_1 y + \phi_2 y^2/2)dy = \phi_2 \int_{-1}^{+1} y^4 dy$$

因而得到特解

$$\phi(y) = \frac{3y}{4} + \frac{5y^2}{2}$$

现在可以考虑方程

$$\phi(y) = \lambda \int \sum_{p=1}^{n} a_p(x) b_p(y) \phi(y) dy \tag{2.29}$$

的特征值与特征函数。若将方程（2.29）重新写为

$$\mu\phi(x) = \int \sum_{p=1}^{n} a_p(x) b_p(x) \phi(y) dy \tag{2.30}$$

显然，积分

$$\int b_p(y) \phi(y) dy$$

为零的 $\phi(y)$ 都满足方程 (2.30)，在那里 $\mu=0$。有时将这样的函数也视为特征函数，但是它们一般是被忽略的。

任一特征函数必有下面的形式

$$\Phi(x)=\sum_{p=1}^{n}\phi_p a_p(x)$$

因此

$$\sum_{p=1}^{n}\phi_p a_p(x)=\lambda\sum_{p=1}^{n}a_p(x)\int b_p(y)\sum_{q=1}^{n}\phi_q a_q(y)dy$$

$$\phi_p=\sum_{q=1}^{n}\phi_q K_{pq}$$

$$k_{pq}=\int b_p(y)a_q(y)dy$$

特征值与特征函数可按通常过程得到。然而，若所有的b_r与所有的 a_q 正交，k_{pq} 对所有的 p、q为零，它也同样对应于 $\mu=0$，且 ϕ_p 为任意。

例 2.5

求由积分方程

$$\phi(x)=\int_0^1(1+xt)\phi(t)dt \qquad 0\leqslant x\leqslant 1$$

所确定的系统的特征值与特征函数。

设

$$\Phi(x)=\phi_0+\phi_1(x)=\int_0^1(1+xt)(\phi_0+\phi_1 t)dt$$

$$=(\phi_0+\phi_1/2)+(\phi_0/2+\phi_1/3)x$$

因此

$$(\lambda-1)\phi_0+\lambda\phi_1/2=0$$

$$\lambda\phi_0/2+(\lambda/3-1)\phi_1=0$$

$$(\lambda-1)(\lambda/3-1)=\lambda^2/4,\ \lambda=8\pm\sqrt{52}$$

且

$$\phi_1:\phi_0=-(7\pm\sqrt{52}):(8\pm\sqrt{52})$$

例 2.6

求方程

$$\phi(x)=\int_0^1(4x-3)t^2\phi(t)dt \qquad 0\leqslant x\leqslant 1$$

所确定的系统的特征值与特征函数

$\Phi(x)=k(4x-3)$ 是唯一可能的特征函数。然而

$$k(4x-3)=\int_0^1(4x-3)(4t^3-3t^2)kdt=0$$

因而对应于 $\mu=0$ 的特征函数是 $(4x-3)$ ，即不存在满足方程的 λ 值。

现在考虑积分方程

$$\phi(x)=\lambda\int\sum_{p=1}^{n}a_p(x)b_p(y)\phi(y)dy+f(x) \qquad (2.31)$$

的解。任何解显然有下面的形式

$$\begin{aligned}\phi(x)&=\lambda\sum_{p=1}^{n}\phi_p a_p(x)+f(x)\\&=\lambda\sum_{p=1}^{n}a_p(x)b_p(y)\left\{\lambda\sum_{q=1}^{n}\phi_q a_q(y)+f(y)\right\}dy+f(x)\end{aligned}$$

当合并 $a_p(x)$ 的同次项，便推得

$$\phi_p=\lambda\sum_{q=1}^{n}k_{pq}\phi_q+f_p \qquad 1\leqslant p\leqslant n \qquad (2.32)$$

它的求解完全类似于方程 (2.6) 。方程 (2.32) 可写为

$$\phi_p-\lambda\sum_{q=1}^{n}k_{pq}\phi_q=f_p$$

由此得

$$\phi_q=\{D_0(\lambda)\}^{-1}\sum_{p=1}^{n}d_{pq}(\lambda)f_p$$

其中 $D_0(\lambda)$ 定义同前，而 $d_{pq}(\lambda)$ 为行列式

$$|\delta_{pq}-\lambda k_{pq}|$$

的$\{p, q\}$元素的代数余子式。这样

$$\phi(x)=f(x)+\lambda\{D_0(\lambda)\}^{-1}\sum_{p=1}^{n}a_p(x)d_{pq}(\lambda)\int\sum_{q=1}^{n}b_q(y)f(y)dy$$

$$=f(x)-\lambda\{D_0(\lambda)\}^{-1}\int D(x,y;\ \lambda)f(y)dy$$

利用 $d_{r,s}$ 的定义，可见 $D(x,y;\ \lambda)$ 为

$$-\begin{vmatrix} 0 & a_1(x)\cdots\cdots\cdots a_n(x) \\ b_1(y) & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \vdots & 1-\lambda k_{pq} \\ b_n(y) & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{vmatrix}$$

$D(x,y;\ \lambda)$为λ的n次多项式。解的另一种写法为

$$\phi(x)=f(x)-\lambda\int R(x,y;\lambda)f(y)dy$$

R 称为预解核它是两个λ的n次多项式之商。

值得一提的是，对于转置核

$$K^T(x,y)=k(y,x)=\sum_{p=1}^{n}a_p(y)b_p(x)$$

具有同样的的特征值，因此也对应同样的 $D_0(\lambda)$ 。然而特征函数 Ψ_r 却不一定与对应的 Φ_r 相同。若K是对称核，当然它们相同。可以证明它们存在着正交性

$$\int\Psi_p(x)\Phi_q(x)dx=\lambda\int\Psi_p(x)\int K(x,y)\,\Phi_q(y)dydx$$

$$=(\lambda_q/\lambda_p)\int\Psi_p(y)\Phi_q(y)dy$$

因而若λ_q与λ_p不相等，

$$\int\Psi_p(x)\Phi_q(x)dx$$

与

$$\iint \Psi_p(x)K(x,y)\Phi_q(y)dxdy$$

必都为零。这正是2.1节所指出的结论，现在给予了证明。这个结论不仅对退化核，事实上对任意的核都是成立的。

当方程（2.31）中的λ是核的一个特征值，例如λ_t，且有p个特征函数$\Phi_{t\alpha}(x)$对应于这个特征值。则解为下面的函数

$$\sum_{\alpha=1}^{p} u_\alpha \Phi_{t\alpha}(x)$$

其中u_α为任意常数。由相容性可得到

$$\int f(x)\Psi_{t\alpha}(x)dx$$
$$=\int \phi(x)\Psi_{t\alpha}(x)dx-\lambda_t\iint \Psi_{t\alpha}(x)K(x,y)\phi(y)dxdy=0$$

求解的后续部分按通常的方法进行。

也可按另一途径，确定$R(x,y;\lambda)$，它类似于矩阵方程（2.9）的迭代解法。定义叠核序列

$$K_1(x,y)=K(x,y)$$

$$K_{n+1}(x,y)=\int K(x,t)K_n(t,y)dt$$

可以证明

$$K_{m+n}(x,y)=\int K_m(x,t)K_n(t,y)dt$$

考虑由下式定义的函数集合

$$\phi^{(0)}(x)=f(x)$$

$$\phi^{(n+1)}(x)=f(x)+\lambda\int K(x,y)\phi^{(n)}(y)dy$$

可以看出

$$\phi^{(n)}(x)=f(x)+\lambda\int K(x,y)\phi(y)dy+\cdots\cdots$$

$$+\lambda^n\int K(x,t_1)dt\int K(t_1,t_2)dt_2\cdots\int K(t_{n-1},y)f(y)dy$$

$$=f(x)+\sum_{r=1}^{n}\lambda^r\int K_r(x,y)f(y)dy$$

这个级数称为诺伊曼级数。

可以证明（见附录D），序列$\{\phi^{(n)}(x)\}$收敛的一个充分条件是

$$|\lambda|<\left\{\iint|K(x,y)|^2dxdy\right\}^{-\frac{1}{2}} \tag{2.33}$$

且

$$\phi^{(n)}(x)-\lambda\int K(x,y)\phi^{(n)}(y)dy-f(x)$$

$$=-\lambda^{n+1}\int K_{n+1}(x,y)f(y)dy \tag{2.34}$$

在同样的条件下附录D中证明了方程（2.34）右端量趋向于零。由此推得，若λ非特征值，则存在唯一解

$$\phi(x)=f(x)+\int\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^nK_n(x,y)f(y)dy \tag{2.35}$$

而预解核为

$$R(x,y;\lambda)=-\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{n-1}K_n(x,y) \tag{2.36}$$

对于每一个特征值λ，预解核R有一无穷远点，故它的收敛半径小于或等于$|\lambda_1|$，其中λ_1为绝对值最小的特征值。因此它收敛的一个充分条件是

$$\left\{\iint|K(x,y)|^2dxdy\right\}^{-\frac{1}{2}}<|\lambda_1|$$

注意，这个理论对一般的核也是成立的，因为无须考虑核的具体属性，所必须的是收敛条件式（2.33）成立。

$$\phi(x) = \lambda\int_0^1 exp\{K(x-y)\}\phi(y)dy + f(x) \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$$

的解。

自然这个解可令为

$$\phi(x) = Cexpkx + f(x)$$

然而，这里使用叠核方法特别方便，因为，若

$$K(x,y) = exp\{k(x-y)\}$$

则 $$K_2(x,y) = \int_0^1 K(x,z)K(z,y)dz$$

$$= \int_0^1 exp\{k(x-z+z-y)\}dz = exp\{k(x-y)\}$$

类似地，所有叠核皆为

$$exp\{k(x-y)\}$$

因而

$$R(x,y;\lambda) = -\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{n-1}K_n(x,y) = -exp\{k(x-y)\}/(1-\lambda)$$

且

$$\phi(x) = f(x) + \lambda/(1-\lambda)exp(kx)\int_0^1 f(y)exp(-ky)dy$$

当 $\lambda = 1$ 时，解式无效。且仅当

$$\int_0^1 f(y)exp(-ky)dy = 0$$

时才可能有解。这时解为

$$\phi(x) = f(x) + Cexp(kx)$$

C 为任意常数。

例 2.9

证明

$$\phi(x)=\lambda\int_0^1 exp\{K(x-y)\}\phi(y)dy+f(x) \quad 0\leqslant x\leqslant 1$$

的解。

自然这个解可令为

$$\phi(x)=Cexpkx+f(x)$$

然而，这里使用叠核方法特别方便，因为，若

$$K(x,y)=exp\{k(x-y)\}$$

则 $$K_2(x,y)=\int_0^1 K(x,z)K(z,y)dz$$

$$=\int_0^1 exp\{k(x-z+z-y)\}dz=exp\{k(x-y)\}$$

类似地，所有叠核皆为

$$exp\{k(x-y)\}$$

因而

$$R(x,y;\lambda)=-\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{n-1}K_n(x,y)=-exp\{k(x-y)\}/(1-\lambda)$$

且

$$\phi(x)=f(x)+\lambda/(1-\lambda)exp(kx)\int_0^1 f(y)exp(-ky)dy$$

当 $\lambda=1$ 时，解式无效。且仅当

$$\int_0^1 f(y)exp(-ky)dy=0$$

时才可能有解。这时解为

$$\phi(x)=f(x)+Cexp(kx)$$

C 为任意常数。

例 2.9

证明

$$K(x,y)+R(x,y;\lambda)=\lambda\int K(x,z)R(z,y;\lambda)dz$$
$$=\lambda\int R(x,z;\lambda)K(z,y)dz$$

由

$$\lambda\int K(x,z)R(z,y;\lambda)dz=-\int\sum_{n=1}^{\infty}K(x,z)\lambda^n K_n(z,y)dz$$

因为级数一致收敛，因而可逐项积分得

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n K_{n+1}(x,y)=-\sum_{n=2}^{\infty}\lambda^{n-1}K_n(x,y)$$
$$=R(x,y;\lambda)+K(x,y)$$

再由

$$\int K(x,z)K_n(z,y)dz=\int K(z,y)K_n(x,z)dz$$

得

$$\int K(x,z)R(z,y;\lambda)dz=\int R(x,z;\lambda)K(z,y)dz$$

2.3 埃尔米特核与对称核

在弗雷德霍姆积分方程理论中，两类特殊的核相当重要。这就是埃尔米特核与对称核。若核具有性质：

$$K(y,x)=\overline{K}(x,y)$$

则称它为埃尔米特核。其中上标“—”表示复共轭。若核具有性质：

$$K(y,x)=K(x,y)$$

则称它为对称核。显然实埃尔米特核为对称核。因此所有对埃尔米特核成立的理论对实对称核也成立。下面，除非特别声明，我们将假定所有的核都为埃尔米特核。然而在例题与练习题中，我们将处理对称核。因为，为了说明某些性质，

这种核考虑起来较容易。这些理论应用在一般情况下，如果分析困难不大，我们就考虑更广泛的核一类。下可一些定理几乎立即可得到。

1． 若特征值存在，则它们均为实数

因为，若

$$\Phi(x)=\lambda\int K(x,y)\Phi(y)dy$$

$$\int\Phi(x)\overline{\Phi}(x)dx=\lambda\iint\overline{\Phi}(x)K(x,y)\Phi(y)dxdy$$

同时有

$$\int\overline{\Phi}(x)\Phi(x)dx=\overline{\lambda}\iint\overline{\Phi}(x)\overline{K}(x,y)\Phi(y)dxdy$$

$$=\overline{\lambda}\iint\Phi(x)K(y,x)\overline{\Phi}(y)dxdy$$

$$=\overline{\lambda}\iint\Phi(y)K(x,y)\overline{\Phi}(x)dxdy$$

因此

$$\lambda=\overline{\lambda}$$

故 λ 为实数。

2． 埃尔米特核的叠核也为埃尔米特核

令

$$K_{\alpha+\beta}(x,y)=\int K_\alpha(x,z)K_\beta(z,y)dz$$

其中 K_α 与 K_β 为埃尔米特核

则 $$\overline{K}_{\alpha+\beta}(y,x)=\int\overline{K}_\alpha(y,z)\overline{K}_\beta(z,x)dz$$

$$=\int K_\alpha(z,y)K_\beta(x,z)dz$$

$$=\int K_{\beta+\alpha}(x,y)=K_{\alpha+\beta}(x,y)$$

结论得证。

3. 不同特征值对应的特征函数相互之间正交。

假设 $\Phi_r(x)$ ，$\Phi_s(x)$ 分别为对应于特征值 λ_r 与 λ_s 的特征函数。为了方便，假定它们都已规范化了，即

$$\int |\Phi_r(x)|^2 dx = 1 \tag{2.37}$$

由于

$$\Phi_r(x) = \lambda_r \int K(x,y)\Phi_r(y)dy$$

且

$$\overline{\Phi}_r(x) = \lambda_r \int \overline{K}(x,y)\overline{\Phi}_r(y)dy = \lambda_r \int K(y,x)\overline{\Phi}(y)dy$$

因此

$$\begin{aligned}\int \overline{\Phi}_r(x)\Phi_s(x)dx &= \lambda_r \iint \Phi_s(x)K(y,x)\overline{\Phi}_r(y)dxdy \\ &= \lambda_r \iint \overline{\Phi}_r(x)K(x,y)\Phi_s(y)dxdy \\ &= \frac{\lambda_r}{\lambda_s}\int \overline{\Phi}_r(x)\Phi_s(x)dx\end{aligned}$$

若 λ_r 与 λ_s 不等，则有

$$\int \overline{\Phi}_r(x)\Phi_s(x)dx = 0 \tag{2.38}$$

且

$$\iint \overline{\Phi}_r(x)K(x,y)\Phi_s(y)dxdy = 0 \tag{2.39}$$

若对应一个特征值存在两个或两个以上的特征函数，利用它们的适当的线性组合，在通常的情况下，总可以整理出适合方程 (2.38) 与 (2.39) 的特征函数。

应用方程 (2.37) 得

$$1=\int \overline{\Phi}_r(x)\,\Phi_r(x)dx=\lambda_r\iint \overline{\Phi}_r(x)K(x,y)\Phi_r(y)dxdy \quad (2.40)$$

于是方程（2.37），（2.38），（2.39）与（2.40）可以归纳为

$$\int \overline{\Phi}_r(x)\Phi_s(x)dx=\delta_{rs} \qquad (2.41)$$

$$\iint \overline{\Phi}_r(x)K(x,y)\Phi_s(y)dxdy=\frac{\delta_{rs}}{\lambda_r} \qquad (2.42)$$

因此与埃尔米特核（因而，对称核）相联系的特征函数形成一规范正交系。

必须明确的是，一个核不一定存在特征值。在例2.6中讨论了这种情况。因此有必要讨论特征值存在的充分条件。事实上可以证明（证明相当冗长，在附录B中给出），正定埃尔米特核的特征值一定存在。正定是指对不恒为零的$\phi(x)$，有

$$\iint \phi(x)K(x,y)\phi(y)dxdy>0$$

负定埃尔米特核的特征值也存在。负定是指对不恒为零的$\phi(x)$有

$$\iint \phi(x)K(x,y)\phi(y)dxdy<0$$

特别地，这些结论对正定或负定的对称核是成立的。
设λ_1与$\Phi_1(x)$分别为由积分方程

$$\phi(x)=\lambda\int K(x,y)\phi(y)dy$$

定义的系统的特征值与相应的规范化特征函数。考虑"减缩"的埃尔米特核

$$R_1(x,y)=k(x,y)-\frac{\Phi_1(x)\overline{\Phi}_1(y)}{\lambda_1}$$

若它不恒为零，则它至少有一特征值 λ_2 及相应的特征函数 $\Phi_2(x)$。即使 λ_2 与 λ_1 相同，$\phi_1(x)$ 也不能是减缩核R_1 的特征函数。因

$$\int R_1(x, y)\Phi_1(y)dy$$

$$=\int K(x,y)\Phi_1(y)dy - \frac{\Phi_2(x)}{\lambda_1}\int|\Phi_1(y)|^2dy \qquad (2.43)$$

可以看出上式右端恒等于零。

有两种情况可能发生，共一是，当进行n 步之后

$$R_n(x,y)=K(x,y)-\sum_{r=1}^{n}\frac{\Phi_r(x)\overline{\Phi}_r(y)}{\lambda_r}$$

等于零。在这种情况下的核 $K(x, y)$ 为退化的。它具有形式

$$K(x, y)=\sum_{r=1}^{n}\frac{\Phi_r(x)\overline{\Phi}_r(y)}{\lambda_r}$$

$$=\sum_{r=1}^{n}\int K(x,z)\Phi_r(z)dz\overline{\Phi}_r(y)$$

且具有有限个数n 的特征值与特征函数。

另一种可能性是这种过程永不终止，因而它有无限个特征值与特征函数。这时可写成

$$R_m(x)=\int|R_m(x,y)|^2dy$$

$$=\int\Big[\overline{K}(x,y)K(x,y)-\overline{K}(x,y)\sum_{r=1}^{m}\frac{\Phi_r(x)\overline{\Phi}_r(y)}{\lambda_r}$$

$$-\overline{K}(x,y)\sum_{r=1}^{m}\frac{\Phi_r(x)\overline{\Phi}_r(y)}{\lambda_r}+$$

$$+\sum_{r=1}^{m}\frac{\Phi_r(x)\overline{\Phi}_r(y)}{\lambda_r}\sum_{s=1}^{m}\frac{\Phi_s(x)\overline{\Phi}_s(y)}{\lambda_s}\Bigg]dy$$

$$=[A(x)]^2-\sum_{r=1}^{m}\frac{\Phi_r(x)\overline{\Phi}_r(x)}{\lambda_r^2} \qquad (2.44)$$

其中

$$[A(x)]^2=\int|K(x,y)|^2dy$$

由于 $R_m(x)\geqslant 0$，故有

$$[A(x)]^2-\sum_{r=1}^{m}\frac{\Phi_r(x)\overline{\Phi}_r(x)}{\lambda_r^2}\geqslant 0$$

所以级数

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\Phi_r(x)\overline{\Phi}_r(x)}{\lambda_r^2}$$

必收敛于小于或等于 $[A(x)]^2$ 的一个和。由积分关系式 (2.44)，得

$$0\leqslant\int R_m(x)dx=\int[A(x)]^2dx-\sum_{r=1}^{m}\frac{1}{\lambda_r^2}$$

由此得到级数

$$\sum_{r=1}^{\infty}\lambda_r^{-2}$$

是收敛的，且 λ_r 趋于无穷。

现在提出这样的问题，级数

$$K^*(x,y)=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\Phi_r(x)\overline{\Phi}_r(y)}{\lambda_r}$$

$$=\sum_{r=1}^{\infty}\Phi_r(x)\int\overline{K}(y,z)\overline{\Phi}_r(z)dz \qquad (2.45)$$

是否在任何意义下都表示核 $K(x, y)$ 。这里有两个问题，第一：这个级数收敛吗？第二，如果收敛，它收敛到 $K(x,y)$ 吗？

首先假设级数K^*一致收敛，在这种情况下，可以证明在我们感兴趣的区域内处处有$K^*(x,y)=K(x,y)$。证明如下：

设

$$R(x,y)=K(x,y)-K^*(x,y)$$

则 R同所有的特征函数 $\Phi_m(x)$ 正交，因为由核的埃尔米特性质有

$$\int R(x,y)\overline{\Phi}_m(x)dx=\int K(x,y)\overline{\Phi}_m(x)dx$$

$$-\int\sum_{r=1}^{\infty}\Phi_r(x)\int\overline{K}(y,z)\overline{\Phi}_r(z)dz\overline{\Phi}_m(x)dx$$

$$=\int K(x,y)\overline{\Phi}_m(x)dx-\int\overline{K}(y,z)\overline{\Phi}_m(z)dz=0 \qquad (2.46)$$

利用这个结果，可见 $R(x,y)$ 恒为零。此结果由反证法得到。

假设 R不恒为零。那么它必须至少有一个特征值 λ_R 和相应的特征函数 Φ_R，使得

$$\Phi_R(x)=\lambda_R\int R(\overline{x,y})\Phi_R(y)dy \qquad (2.47)$$

同时，$\Phi_R(x)$将与 K的所有特征函数正交，因为借助于式(2.46)可得

$$\int\Phi_R(x)\overline{\Phi}_m(x)dx=\lambda_R\iint\overline{\Phi}_m(x)R(x,y)\Phi_R(y)dxdy=0 \qquad (2.48)$$

所以

$$\int K^t(x,y)\Phi_R(y)dy=\int\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\Phi_r(x)\overline{\Phi}_r(y)}{\lambda_r}\Phi_R(y)dy=0 \quad (2.49)$$

由于级数式（2.45）是一致收敛的，逐项积分是合理的。

方程（2.47）可以重新写为

$$\Phi_R(x)=\lambda_R\int[K(x,y)-K^*(x,y)]\Phi_R(y)dy$$

$$=\lambda_R\int K(x,y)\Phi_R(y)dy \tag{2.50}$$

所以 Φ_R 是原积分核 k 的特征函数，且由方程（2.48），它是自身正交的，故

$$\int\Phi_R(x)\overline{\Phi}_R(x)dx=0$$

这仅当 $\Phi_R(x)$ 几乎处处为零时才可能，故 $R)x,y)$ 必为零，即

$$K(x,y)=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\Phi_r(x)\overline{\Phi}_r(y)}{\lambda_r} \tag{2.51}$$

显而易见，上面的分析即使特征函数集 $\{\Phi_r\}$ 不完备也是成立的。换一种形式

$$K(x,y)=\sum_{r=1}^{\infty}\mu_r\Phi_r(x)\overline{\Phi}_r(y)$$

对可分核的情况，除了有限个 μ_r 之外其他的全部为零。即使级数式（2.45）仅在平均意义下收敛到 $K^*(x,y)$（见附录F）上述结果也是成立的。在这种情况下，结论式(2.49)的证明应取不同的形式，

令

$$J=\int K^t(x,y)\Phi_R(y)dy$$

$$=\int\left[K^t(x,y)-\sum_{r=1}^{n}\frac{\Phi_r(x)\overline{\Phi}_r(y)}{\lambda_r}\right]\Phi_R(y)dy$$

$$+\int\sum_{r=1}^{n}\frac{\Phi_r(x)\overline{\Phi}_r(y)}{\lambda_r}\Phi_R(y)\,dy$$

$$=\int\left[K^*(x,y)-\sum_{r=1}^{n}\frac{\Phi_r(x)\overline{\Phi}_r(y)}{\lambda_r}\Phi_R(y)\right]dy$$

上式推导利用了式 (2.48) 并对所有 n 都成立。现在，利用布尼亚可夫斯基-柯西-施瓦兹不等式得

$$|J|^2\leqslant\int\left|K^*(x,y)-\sum_{r=1}^{n}\frac{\Phi_r(x)\overline{\Phi}_r(y)}{\lambda_r}\right|^2dy\int|\Phi_R(y)|^2dy$$

由于平均收敛性，第一项当 n 趋向无穷时则趋向于零。因而可得

$$K(x,y)=\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\frac{\Phi_r(x)\overline{\Phi}_r(y)}{\lambda_r}\qquad(2.52)$$

这在我们感兴趣的区域内，几乎处处成立。式 (2.52) 称为双线性公式。

例 2.10

求积分方程

$$\Phi(x)=\lambda\int_0^{\pi}K(x,y)\phi(y)dy$$

的特征值与特征函数，其中

$$K(x,y)=\cos x\sin y\qquad 0\leqslant x\leqslant y\leqslant\pi$$
$$=\cos y\sin x\qquad 0\leqslant y\leqslant x\leqslant\pi$$

K 显然为对称核，可应用埃尔米特理论，方程可写为

$$\phi(x)=\lambda\sin x\int_0^{x}\cos y\,\phi(y)dy+\lambda\cos x\int_x^{\pi}\sin y\,\phi(y)dy$$

对 x 微分两次，得

$$\phi''(x)+(1-\lambda)\phi(x)=0$$

同时 $\phi(x)$ 必须满足边界条件 $\phi'(0)=0$，$\phi(\pi)=0$。显然，当 $\lambda\geqslant 1$，这些条件不能满足。

方程 $\phi''(x)+\nu^2\phi(x)=0$ 的形如 $\cos\nu x$ 的解将满足这些条件，只需 $\nu=r-\frac{1}{2}$，其中 r 为正整数。于是特征值由

$$1-\lambda_r=\left(r-\frac{1}{2}\right)^2, \quad \lambda_r=1-\left(r-\frac{1}{2}\right)^2$$

所给出，特征函数则与 $\cos\left(r-\frac{1}{2}\right)x$ 成比例。

由于

$$\int_0^\pi\left[\cos\left(r-\frac{1}{2}\right)x\right]^2dx=\int_0^\pi\left(\frac{1+\cos(2r-1)x}{2}\right)dx=\frac{\pi}{2}$$

故规范化的特征函数为

$$\sqrt{\left(\frac{2}{\pi}\right)}\cos\left(r-\frac{1}{2}\right)x$$

从而得

$$K(x,y)=\frac{2}{\pi}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\cos\left(r-\frac{1}{2}\right)x\cos\left(r-\frac{1}{2}\right)y}{1-\left(r-\frac{1}{2}\right)^2}$$

显然，这种级数绝对收敛。

例 2.11

求积分方程

$$\phi(x)=\lambda\int_{-\pi}^{\pi}\log\{1-2\alpha\cos(x-y)+\alpha^2\}\phi(y)dy$$

的特征值与特征函数，其中 α 为实数，且 $0<\alpha<1$。

核显然是对称的：

$$\log(-2\alpha\cos z+\alpha^2)=\log(1-\alpha e^{iz})+\log(1-\alpha e^{-iz})$$

$$=-\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\alpha_r e^{irz}}{r}-\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\alpha^r e^{-irz}}{r}$$

$$=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{2\alpha^r\cos rz}{r}$$

故

$$\log\{1-2\cos(x-y)+\alpha^2\}$$

$$=-2\sum_{r=1}^{\infty}\alpha^r\left(\frac{\cos rx\cos ry+\sin rx\sin ry}{r}\right)$$

特别函数显然为 $\cos rx$ 与 $\sin rx$，但它们未规范化。

由于

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 rx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1-\cos 2rx}{2}\right)dx=\pi$$

而完备正交系为

$$\Phi_r(x)=\sqrt{\left(\frac{1}{\pi}\right)}\cos rx \quad 或 \quad \sqrt{\left(\frac{1}{\pi}\right)}\sin rx$$

故

$$\log\{1-2\alpha\cos(x-y)+\alpha^2\}$$

$$=-\sum_{r=1}^{\infty}\frac{2\pi\alpha^r}{r}\ \frac{1}{\pi}(\cos rx\cos ry+\sin rx\sin ry)$$

将这个展开式与

$$K(x,y)=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\Phi_r(x)\overline{\Phi}_r(y)}{\lambda_r}$$

比较，可见特征值具有形式 $-r/(2\pi\alpha^r)$，其中 r 为正整数。每个特征值出现两次，且对应的两个正交的特征函数为

$$\left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\sin rx,\quad \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\cos rx$$

若 $0<\alpha<1$，级数总是绝对收敛的。

式（2.51）的结果可推广到叠核，为此

$$K_2(x,y)=\int K(x,z)K(z,y)dz$$

$$=\int\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\Phi_r(x)\overline{\Phi}_r(z)}{\lambda_r}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\Phi_s(z)\overline{\Phi}_s(y)}{\lambda_s}dz$$

$$=\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\Phi_r(x)\overline{\Phi}_s(y)}{\lambda_r\lambda_s}\delta_{rs}$$

$$=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\Phi_r(x)\overline{\Phi}_r(y)}{\lambda_r^{\,2}} \tag{2.53}$$

若级数式（2.51）绝对收敛，上面的证明是合法的，且可以论证，其收敛性仅需平均收敛。可以类似地证明进一步的结果

$$K_n(x,y)=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\Phi_r(x)\overline{\Phi}_r(y)}{\lambda_r^{\,n}} \tag{2.54}$$

核的迹由下式定义

$$T_r(K)=\int K(x,x)dx \tag{2.55}$$

不难看出

$$T_r(K_n)=\sum_{r=1}^{\infty}\lambda_r^{-n} \tag{2.56}$$

例 2.12

求级数

$$\sum_{r=1}^{\infty}\left[1-\left(r-\frac{1}{2}\right)^2\right]^{-1}$$

的和。

由例 2.10,

$$K(,xy)=\frac{2}{\pi}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\cos\left(r-\frac{1}{2}\right)x\cos\left(r-\frac{1}{2}\right)y}{1-\left(r-\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$K(x,x)=\cos x\sin x$$

且

$$T_r(K)=\sum_{r=1}^{\infty}\lambda_r^{-1}=\sum_{r=1}^{\infty}\left[1-\left(r-\frac{1}{2}\right)^2\right]^{-1}$$

$$=\int_0^{\pi}\cos x\sin x dx=0$$

必须指出，这个理论仅能应用于埃尔米特核（包括对称核）。若核不满足所要求的性质，由下例可见，定理的结论是不成立的。

例 2.13

求核

$$K(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}k_n\cos nx\cos(n+1)y \qquad -\pi\leqslant x,y\leqslant\pi$$

的特征值与特征函数。其中 k_n 使级数收敛。

$$\phi(x)=\lambda\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}k_n\cos nx\cos(n+1)y\phi(y)dy$$

由于特征函数显然具有下面形式

$$\sum_{n=0}^{\infty}\phi_n\cos nx$$

故

$$\sum_{n=0}^{\infty}\phi_n\cos nx=\int\sum_{n=0}^{\infty}k_n\cos nx\cos(n+1)y\sum_{s=0}^{\infty}\phi_s\cos sydy$$

且

$$\phi_n = \lambda k_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+1)y \sum_{s=0}^{\infty} \phi_s \cos sy dy$$
$$= \lambda k_n \pi \phi_{n+1}$$

即

$$\phi_{n+1} = \frac{1}{\lambda k_n \pi} \phi_n, \qquad \phi_n = \prod_{s=0}^{n} \frac{1}{\lambda k_s \pi} \phi_0$$

因为级数一致收敛，当 n 趋向无穷大时，k_n 趋向于零。由此得 ϕ_n 将无限增大，特征函数不存在。在没有特征函数时，特征值的概念当然就无意义了。

2.4 希尔伯特—施密特定理

借助于希尔伯特—施密特定理可以得到第一类与第二类弗雷德霍姆方程的解。在开始正式讨论之前，首先考虑由方程

$$f(x) = \int K(x,y) g(y) dy$$

定义的三个函数 $f(x)$，$g(x)$，$K(x,y)$ 之间的关系。因为，不严格地说，积分将使奇异性抹平，所以 $f(x)$ 比 $K(x,y)$ 和 $g(y)$ 有较好的性质，例如，若 $K(x,y)$ 为连续而 $g(y)$ 分段连续，则 $f(x)$ 连续。假若 $f(x)$，$g(y)$ 与 $K(x,y)$ 用级数表示，则表示 $f(x)$ 的级数的收敛性将比表示 $K(x,y)$ 与 $g(y)$ 的级数的收敛性好。

希尔伯特—施密特定理如下：若 $f(x)$ 可表示为

$$f(x) = \int K(x,y) g(y) dy$$

其中

$$\int |g(y)|^2 dy < \infty$$

且序列

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{\Phi_r(x)\overline{\Phi}_r(y)}{\lambda_r}$$

平均收敛于 $K(x,y)$ ，则 $f(x)$ 可表示为与核相伴的正交函数系的级数

$$f(x) = \sum_{r=1}^{\infty} f_r \Phi_r(x) \tag{2.57}$$

形式地

$$f(x) = \int \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\Phi_r(x)\overline{\Phi}_r(y)}{\lambda_r} g(y)dy$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty} (g_r/\lambda_r)\phi_r(x)$$

其中

$$g_r = \int g(y)\overline{\Phi}_r(y)dy$$

因而

$$f_r = g_r/\lambda_r \tag{2.58}$$

λ_r 随 r 的增大而增大，故以 f_r 为系数的级数比以 g_r 为系数的级数“更收敛”。证明如下：

$$f(x) = \int K(x,y)g(y)dy$$

$$= \int \left[K(x,y) - \sum_{r=1}^{n} \frac{\Phi_r(x)\overline{\Phi}_r(y)}{\lambda_r} \right] g(y)dy$$

$$+ \int \sum_{r=1}^{n} \frac{\Phi_r(x)\overline{\Phi}_r(y)}{\lambda_r} g(y)dy$$

令

$$r_n(x) = f(x) - \sum_{r=1}^{n} f_r \Phi_r(x)$$

$$=\int\left[K(x,y)-\sum_{r=1}^{n}\frac{\Phi_r(x)\overline{\Phi}_r(y)}{\lambda_r}\right]g(y)dy$$

则

$$|r_n(x)|^2\leqslant\int\left|K(x,y)-\sum_{r=1}^{n}\frac{\Phi_r(x)\overline{\Phi}_r(y)}{\lambda_r}\right|^2dy$$

$$\times\int|g(y)|^2dy$$

由于级数

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{\Phi_r(x)\overline{\Phi}_r(y)}{\lambda_r}$$

平均收敛于 $K(x,y)$，即

$$\lim_{n\to\infty}\int\left|K(x,y)-\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\Phi_r(x)\overline{\Phi}_r(y)}{\lambda_r}\right|^2dy=0$$

由此得

$$\lim_{n\to\infty}\left[f(x)-\sum_{r=1}^{n}f_r\Phi_r(x)\right]=0$$

式 (2.57) 得证。

值得指出的是

$$\sum_{r=n+1}^{\infty}|f_r\Phi_r(x)|^2$$

$$=\sum_{r=n+1}^{\infty}\left|\frac{g_r\Phi_r(x)}{\lambda_r}\right|^2\leqslant\sum_{r=n+1}^{\infty}|g_r|^2\sum_{r=n+1}^{\infty}\frac{|\Phi_r(x)|^2}{\lambda_r^2}$$

由于

$$\sum_{r=n+1}^{\infty}|g_r|^2$$

当 n 趋向无穷时趋于零（见附录 G）。进而，再附加以条件

$$\int |K(x,y)|^2 dy = \{A(x)^2\} \leqslant N^2$$

这样一来，无容置疑地可得

$$\sum_{r=n+1}^{\infty} \frac{|\Phi_r(x)|^2}{\lambda_r^2} \leqslant N^2$$

及

$$\sum_{r=n+1}^{\infty} |f_r \Phi_r(x)|^2$$

趋向于零。因而级数或（2.57）绝对收敛。

现在考虑，第一类积分方程

$$f(x) = \int K(x,y)\phi(y)dy$$

其中 $f(x)$已知。这个积分方程解的性质依赖于核的特征函数集合是否完备（附录G）。事实上，若这个集合不完备，可能无解。

首先考虑这个集合为完备的情况，这时 $f(x)$ 可写为

$$f(x) = \sum_{r=1}^{\infty} f_r \Phi_r(x) = \sum_{r=1}^{\infty} \int f(z)\overline{\Phi}_r(z)dz\Phi_r(x)$$

核具有形式

$$K(x,y) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\Phi_r(x)\overline{\Phi}_r(y)}{\lambda_r}$$

函数 $\phi(y)$可展开成

$$\phi(y) = \sum_{r=1}^{\infty} C_r \Phi_r(y)$$

由此得

$$\begin{aligned} f(x) &= \int K(x, y)\phi(y)dy \\ &= \int \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\Phi_r(x)\overline{\Phi}_r(y)}{\lambda_r} \sum_{s=1}^{\infty} C_r \Phi_s(y)dy \\ &= \sum_{r=1}^{\infty} (C_r/\lambda_r)\Phi_r(x) \end{aligned}$$

而

$$C_r = \lambda_r f_r = \lambda_r \int f(z) \overline{\Phi}_r(z) dz$$

因此积分方程的解

$$\phi(x) = \sum_{r=1}^{\infty} \lambda_r \int f(z) \overline{\Phi}_r(z) dz \Phi_r(x) \tag{2.59}$$

若

$$\int |\phi(x)|^2 dx$$

存在，或者说级数

$$\sum_{r=1}^{\infty} \lambda_r^2 f_r^2$$

收敛。这时，希尔伯特—施密特定理条件成立。级数式(2.59)为方程的唯一解。

然而，即使函数 $f(x)$具有很好的性质，级数式(2.59)有可能不收敛。这是因为 λ_r 是无限增大的，尽管具有系数 f_r的级数收敛，但以 $\lambda_r f_r$ 为系数的级数可能不收敛。这时式(2.59)仅为形式解，它是分布函数或广义函数，而非通常的函数（见附录 I）。

现在假设与核对应的特征函数集合是不完备的，但是可以附加上一正交函数集合 Φ_s^* 使之完备化。这个集合 Φ_s^* 可能但并不一定是无限的。

$f(x)$的展开式为

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{r=1}^{\infty} f_r \Phi_r(x) + \sum_s f_s^* \Phi_s^*(x) \\ &= \sum_{r=1}^{\infty} \int f(z) \overline{\Phi}_r(z) dz \Phi_r(x) \\ &\quad + \sum_s \int f(z) \overline{\Phi}_s^*(z) dz \Phi_s^*(x) \end{aligned} \tag{2.60}$$

$$K(x,y)=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\Phi_r(x)\overline{\Phi}_r(y)}{\lambda_r}$$

这里是对无穷项求和，有限项求和对应于退化核。事实上我们将看到，当特征函数集合是不完备时，很多理论类似于退化核的情况。这时解取下面形式

$$\phi(y)=\sum_{r=1}^{\infty}C_r\Phi_r(y)+\sum_s C_s{}^*\Phi_s{}^*(y)$$

这样

$$f(x)=\int K(x,y)\phi(y)dy$$

$$=\int\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\Phi_r(x)\overline{\Phi}_r(y)}{\lambda_r}\left[\sum_{r=1}^{\infty}C_r\Phi_r(y)+\sum_s C_s{}^*\Phi_s{}^*(y)\right]dy$$

$$=\sum_{r=1}^{\infty}(C_r/\lambda_r)\Phi_r(x) \tag{2.61}$$

比较方程 (2.60) 与 (2.61) 可见，仅当所有的 $f_s{}^*$ 都为零时解才存在。即对所有的 s 有

$$\int f(z)\overline{\Phi}_s{}^*(z)dz=0$$

否则，积分方程非自相容，不存在解。

当解存在时，它可由

$$\phi(y)=\sum_{r=1}^{\infty}\lambda_r\int f(z)\overline{\Phi}_r(z)dz\Phi_r(y)$$

给出，这个级数是收敛的。但是这种解不唯一，形为

$$\sum_s c_s{}^*\Phi_s{}^*(y)$$

的附加项必须包含在解内，其中 $c_s{}^*$ 为任意常数。对应于核的特征函数集不完备的情况可以这样理解，若 $\mu_r=\lambda_r{}^{-1}$，核可以写为

$$K(x,y)=\sum_{r=1}^{\infty}\mu_r\Phi_r(x)\overline{\Phi}_r(y)+\sum_s\mu_s^*\Phi_s^*(x)\overline{\Phi}_s^*(y)$$

其中所有的 μ_s^* 为零。（当 r 增大时，μ_r 趋向于零，但不等于零。）

例 2.14

求积分方程

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\alpha^2}{1-2\alpha\cos(x-y)+\alpha^2}\phi(y)dy \qquad 0<\alpha<1,\ -\pi\leqslant x\leqslant\pi$$

的傅立叶级数解。

根据本章最后练习 19 的结果，核可以写为

$$\frac{1}{2\pi}\frac{1-\alpha^2}{1-2\alpha\cos(x-y)+\alpha^2}$$

$$=\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n(\cos nx\cos ny+\sin nx\sin ny)$$

并且这个级数是绝对收敛的。

$f(x)$的傅立叶级数为

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

其中

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(z)\cos nz\,dz \qquad n\geqslant0$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(z)\sin nz\,dz \qquad n>0$$

设

$$\phi(y)=\frac{1}{2}c_0+\sum_{n=1}^{\infty}(c_n\cos ny+d_n\sin ny)$$

那么

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}a^{n}(\cos nx\cos ny+\sin nx\sin ny)\right]$$

$$\times\left[\frac{1}{2}c_0+\sum_{n=1}^{\infty}(c_n\cos ny+d_n\sin ny)\right]dy$$

$$=\frac{1}{2}c_0+\sum_{n=1}^{\infty}a^{n}(c_n\cos nx+d_n\sin nx)$$

因而

$$a_n=c_na^n\quad,\qquad b_n=d_na^n$$

故积分方程的解由级数

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a^{-n}(a_n\cos ny+b_n\sin ny)$$

给出，如果它是收敛的。

例 2.15

求解积分方程

$$\log(1-2\beta\cos x+\beta^2)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log\{1-2\alpha\cos(x-y)+\alpha^2\}\phi(y)dy\quad -\pi\leqslant x\leqslant\pi$$

其中 α, β 为正实数。

这个问题是解依赖于参数 α, β 值的一个例子。仅在一种情况下这个解是明显的。当 $\alpha=\beta$ 时形式解为

$$\phi(y)=\pi\delta(y)$$

其中 $\delta(y)$为狄拉克 (Dirac) δ—函数，它是一分布函数而非通常函数（见附录 I）。这种情况今后将不予考虑。

若 $\alpha\leqslant1$

$$\log(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha^n}{n}\cos nx$$

而若 $\alpha>1$

$$\log(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)=2\log\alpha-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha^{-n}}{n}\cos nx$$

若 $\beta\leqslant 1$

$$\log\{1-2\beta\cos(x-y)+\beta^2\}$$
$$=-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta^n}{n}(\cos nx\cos ny+\sin nx\sin ny)$$

在这种情况下，因为不存在常数项，对应于核的正交函数集是不完备的。

若 $\beta>1$

$$\log\{1-2\beta\cos(x-y)+\beta^2\}$$
$$=2\log\beta-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta^{-n}}{n}(\cos nx\cos ny+\sin nx\sin ny)$$

令

$$\phi(y)=\frac{1}{2}c_0+\sum_{n=1}^{\infty}(c_n\cos ny+d_n\sin ny)$$

若 $\beta\leqslant 1$,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log\{1-2\beta\cos(x-y)+\beta^2\}\phi(y)dy$$
$$=-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta^n}{n}(c_n\cos nx+d_n\sin nx)$$

若 $\beta>1$,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log\{1-2\beta\cos(x-y)+\beta^2\}\phi(y)dy$$
$$=2\log\beta\, c_0-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta^{-n}}{n}(c_n\cos nx+d_n\sin nx)$$

尚有四种情况需考虑

给出。当 $\beta<\alpha$，解为

$$\frac{\log\alpha}{\log\beta}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n}\cos nx=\frac{\log\alpha}{\log\beta}+\frac{\alpha\beta\cos x-\beta^{2}}{\alpha^{2}-2\alpha\beta\cos x+\beta^{2}}$$

当 $\alpha>\beta$，这个级数不收敛，积分方程无解。

由此例可见，对积分方程中参数的所在区间必须给予重视。

第二类非齐次方程也可用类似方法求解。同样必须考虑对应于核的规范正交函数集的完备性。

首先考虑这个集合为完备的，则方程

$$\phi(x)-\lambda\int K(x,y)\phi(y)=f(x)$$

可以重写为

$$\sum_{r=1}^{\infty}c_r\Phi_r(x)-\lambda\int\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\Phi_r(x)\overline{\Phi}_r(y)}{\lambda_r}\sum_{m=1}^{\infty}c_m\Phi_m(y)dy$$

$$=\sum_{r=1}^{\infty}f_r\Phi_r(x) \tag{2.62}$$

或

$$\sum_{r=1}^{\infty}\left(c_r-\frac{\lambda}{\lambda_r}c_r\right)\Phi_r(x)=\sum_{r=1}^{\infty}f_r\Phi_r(x)$$

因而

$$c_r=f_r/(1-\lambda/\lambda_r)$$

且

$$\phi(x)=\sum_{r=1}^{\infty}f_r/(1-\lambda/\lambda_r)\Phi_r(x) \tag{2.63}$$

$$=\sum_{r=1}^{\infty}\lambda_r\int\frac{f(z)\overline{\Phi}_r(z)dz\,\Phi_r(x)}{\lambda-\lambda_r}$$

$$=f(x)-\lambda\int\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\Phi_r(x)\overline{\Phi}_r(y)f(y)dy}{\lambda-\lambda_r} \tag{2.64}$$

给出。当 $\beta<\alpha$，解为

$$\frac{\log\alpha}{\log\beta}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n}\cos nx=\frac{\log\alpha}{\log\beta}+\frac{\alpha\beta\cos x-\beta^{2}}{\alpha^{2}-2\alpha\beta\cos x+\beta^{2}}$$

当 $\alpha>\beta$，这个级数不收敛，积分方程无解。

由此例可见，对积分方程中参数的所在区间必须给予重视。

第二类非齐次方程也可用类似方法求解。同样必须考虑对应于核的规范正交函数集的完备性。

首先考虑这个集合为完备的，则方程

$$\phi(x)-\lambda\int K(x,y)\phi(y)=f(x)$$

可以重写为

$$\sum_{r=1}^{\infty}c_r\Phi_r(x)-\lambda\int\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\Phi_r(x)\overline{\Phi}_r(y)}{\lambda_r}\sum_{m=1}^{\infty}c_m\Phi_m(y)dy$$

$$=\sum_{r=1}^{\infty}f_r\Phi_r(x) \tag{2.62}$$

或

$$\sum_{r=1}^{\infty}\left(c_r-\frac{\lambda}{\lambda_r}c_r\right)\Phi_r(x)=\sum_{r=1}^{\infty}f_r\Phi_r(x)$$

因而

$$c_r=f_r/(1-\lambda/\lambda_r)$$

且

$$\phi(x)=\sum_{r=1}^{\infty}f_r/(1-\lambda/\lambda_r)\Phi_r(x) \tag{2.63}$$

$$=\sum_{r=1}^{\infty}\lambda_r\int\frac{f(z)\overline{\Phi}_r(z)dz\,\Phi_r(x)}{\lambda-\lambda_r}$$

$$=f(x)-\lambda\int\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\Phi_r(x)\overline{\Phi}_r(y)f(y)dy}{\lambda-\lambda_r} \tag{2.64}$$

比较式，(2.35)，(2.36) 与 (2.64) 可得预解核为

$$R(x, y;\lambda) = -\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{n-1}K_n(x, y) = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{\Phi_r(x)\overline{\Phi}_r(y)}{\lambda-\lambda_r}$$

$$= -K(x, y)+\lambda\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\Phi_r(x)\overline{\Phi}_r(y)}{\lambda_r(\lambda-\lambda_r)} \qquad (2.65)$$

这个方程也可借助展开成λ的幂级数的方法，且应用关系式 (2.54) 得到。级数式 (2.63) 的收敛性与 $f(x)$ 展开的级数相同，因为

$$\lim_{n=\infty}\lambda/\lambda_n=0$$

同时，对表达式$\int K(x,y)\phi(y)dy$，应用希尔伯特—施密特定理的条件与表达式$\int K(x, y)f(y)dy$ 相同，但后者要求$\int|f(y)|^2dy$ 有界，且对应于核的无穷级数平均收敛于它本身。

假如λ不等于某一个特征值 λ_p，则上面的分析成立。在这种情况下，显然仅当

$$\int f(z)\overline{\Phi}_p(z)dz=0$$

时解存在，且为下述形式

$$\phi(x)=\sum_{\substack{r=1\\ r\neq p}}^{\infty}\frac{\lambda_r\int f(z)\overline{\Phi}_r(z)dz\,\Phi_r(x)}{\lambda_r-\lambda}+C_p\Phi_p(x) \quad (2.66)$$

其中 C_p 为任意常数。

然而，若对应于核的规范正交函数集不完备时必须附加函数集合Φ_s^*使其完备化。这与第一类方程的情况完全相同。

$$\phi(x)=\sum_{r=1}^{\infty}c_r\Phi_r(x)+\sum_s c_s\Phi_s^*(x)$$

$$f(x)=\sum_{r=1}^{\infty}f_r\Phi_r(x)+\sum_s f_s\Phi_s^*(x)$$

所以

$$\sum_{r=1}^{\infty}c_r\Phi_r(x)+\sum_s c_s^*\Phi_s^*(x)$$

$$-\lambda\int\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\Phi_r(x)\overline{\Phi}_r(y)}{\lambda_r}\left[\sum_{r=1}^{\infty}c_r\Phi_r(y)+\sum_s c_s^*\Phi_s^*(y)\right]dy$$

$$=\sum_{r=1}^{\infty}f_r\Phi_r(x)+\sum_s f_s^*\Phi_s^*(x)$$

正如以前一样，可得

$$c_r(1-\lambda/\lambda_r)=f_r,\quad c_s^*=f_s^* \tag{2.67}$$

需要指出的是当λ为特征值时，希尔伯特—施密特定理的应用类似于前面的讨论。

例 2.16

积分方程

$$\phi(x)=\frac{1}{4}(\pi^2-x^2)+\frac{\lambda}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-a^2}{1-2a\cos(x-t)+a^2}\phi(t)dt$$

$$-\pi\leqslant x\leqslant\pi,\quad 0<a<1$$

在什么条件下方程可解？并求其解。 (Wales)

显然

$$\frac{1}{4}(\pi^2-x^2)=\frac{1}{6}\pi^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cos nx}{n^2}$$

进而，由例2.14可得

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-a^2}{1-2a\cos(x-t)+a^2}\phi(t)dt=$$

$$= \frac{1}{2}c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n\cos nx + d_n\sin nx)a^n$$

若

$$\phi(x) = \frac{1}{2}c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n\cos nx + d_n\sin nx)$$

则有

$$\frac{1}{2}c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n\cos nx + d_n\sin nx)$$

$$= \frac{1}{6}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\cos nx + \lambda\Big[\frac{1}{2}c_0$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}a^n(c_n\cos nx + d_n\sin nx)\Big]$$

由此得

$$c_0 = \frac{1}{3}\pi^2/(1-\lambda)$$

$$c_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^2(1-\lambda a^n)}, \quad d_n = 0, \quad n > 0$$

且

$$\phi(x) = \frac{1}{6}\frac{\pi^2}{1-\lambda} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2(1-\lambda a^n)}\cos$$

假若 $\lambda \neq a^{-n}$，$n \geqslant 0$ 则方程有解。否则，方程无解。

2.5 核的埃尔米特化与对称化

在上一节，我们知道，对埃尔米特核（或对称核）可以进行很好的处理。因此会立即提出这样的问题：是否包含任意核的积分方程都可以转化成埃尔米特核或对称核的积分方程呢？这个问题可以回答如下。

设 $K(x,y)$ 为任意核，与它对应的第二类积分方程为

$$\phi(x)-\lambda\int K(x,y)\phi(y)dy=f(x) \tag{2.68}$$

用 $\overline{K}(x,z)$ 乘上式两边，并关于x在定义域上积分得

$$\int\overline{K}(x,z)\phi(x)dx-\lambda\int\overline{K}(x,z)K(x,y)\phi(y)dxdy$$

$$=\int\overline{K}(x,z)f(x)dx$$

用 y 代替 x，用 x 代替 z，上方程可写为

$$\int[\overline{K}(y,x)-\lambda K_L(x,y)]\phi(y)dy=\int\overline{K}(y,x)f(y)dy \tag{2.69}$$

其中

$$K_L(x,y)=\int\overline{K}(z,x)K(z,y)dz \tag{2.70}$$

容易验证，$K_L(x,y)$ 为埃尔米特核，用 $-\lambda$ 乘方程（2.69）并与方程（2.68）相加得

$$\phi(x)-\lambda\int[K(x,y)+\overline{K}(y,x)-\lambda K_L(x,y)]\phi(y)dy$$

$$=f(x)-\lambda\int\overline{K}(y,x)f(y)dy \tag{2.71}$$

这里的核为依赖于 λ 的埃尔米特核。由非齐次第二类方程的求解观点，不妨将 λ 取为 1。除非 1 是

$$\phi(x)-\lambda\int[K(x,y)+\overline{K}(y,x)$$

$$-\lambda K_L(x,y)]\phi(y)dy=0 \tag{2.72}$$

的特征值，否则将不会遇到任何困难。如果 1 为特征值时，这个问题可以象前面那样处理。

现在考虑相伴方程

$$\psi(x)-\lambda\int K(y,x)\psi(y)dy=g(x) \tag{2.73}$$

和前面一样，可以得到另一个具有埃尔米特核的方程。

$$\psi(x)-\lambda\int[\overline{K}(x,y)+K(y,x)-\lambda K_R(x,y)]\psi(y)dy$$

$$=g(x)-\lambda\int\overline{K}(x,y)g(y)dy \tag{2.74}$$

其中

$$K_R(x,\ y)=\int\overline{K}(y,z)K(x,z)dz \tag{2.75}$$

如果 K是实的，按着同样的过程可以得到两个方程

$$\phi(x)-\lambda\int[K(x,y)+K(y,x)-\lambda K_L(x,y)]\phi(y)dy$$

$$=f(x)-\lambda\int K(y,x)f(y)dy \tag{2.76}$$

其中

$$K_L(x,y)=\int K(z,x)K(z,y)dz$$

及

$$\psi(x)-\lambda\int[K(x,y)+K(y,x)-K_R(x,y)]\psi(y)dy$$

$$=g(x)-\lambda\int K(x,y)g(y)dy \tag{2.77}$$

其中 $$K_R(x,y)=\int K(x,z)K(y,z)dz$$

由此可见 K_L 与 K_R 以及对应于方程（2.76）与（2.77）的核是对称的。

由于

$$\int K_L(x,y)\phi(y)\overline{\phi}(x)dxdy$$

$$=\iiint\overline{K}(z,x)K(z,y)\phi(y)\overline{\phi}(x)dxdydz$$

$$=\int\left|\int K(z,y)\phi(y)dy\right|^2dz>0 \tag{2.78}$$

推知，埃尔米特核 K_L（核 K_R 完全一样）是正定的。（同样的结论对实对称核也是成立的，从现在起，除非必要，将不特别指出是对称核。）这意味着，K_L 与 K_R 的特征值是正的，且可分别写为 $\lambda^2{}_{Ln}$ 和 $\lambda^2{}_{Rn}$，其中 λ_{Ln} 与 λ_{Rn} 为非零实数，为了方便可以取为正数。事实上可以证明 K_L 与 K_R 具有相同的特征值。

假设 $\phi_L(x)$ 是核 K_L 对应于特征值 $\lambda_L{}^2$ 的特征函数，令

$$
\begin{aligned}
\psi_L(x) &= \lambda_L \int K(x,y)\,\Phi_L(y)\,dy \\
&= \lambda_L{}^3 \int K(x, y) \int K_L(y,u)\,\Phi_L(u)\,du dy \\
&= \lambda_L{}^3 \iiint K(x, y)\overline{K}(z,y)K(z,u)\,\Phi_L(u)\,dudydz \\
&= \lambda_L{}^3 \iint K_R(z,x)K(z,u)\,\Phi_L(u)\,dzdu \\
&= \lambda_L{}^2 \int K_R(z,x)\,\psi_L(z)\,dz
\end{aligned}
\tag{2.79}
$$

所以 $\psi_L(x)$ 是核 K_R 对应于特征值 $\lambda_L{}^2$ 的特征函数，事实上 $\lambda_L{}^2$ 是 K_L 的特征值。

类似地，若

$$
\phi_R(x) = \lambda_R \int K(y,x)\,\Psi_R(y)\,dy
$$

其中 Ψ_R 是核 K_R 对应于特征值 $\lambda_R{}^2$ 的特征函数，则

$$
\phi_R(x) = \lambda_R{}^2 \int K_L(x,z)\,\phi_R(z)\,dz \tag{2.80}
$$

因而 ϕ_R 是核 K_L 对应于特征值 $\lambda_R{}^2$ 的特征函数，事实上 $\lambda_R{}^2$ 是 K_R 的特征值。因此 K_R 与 K_L 具有相同的特征值，故可记成 $\lambda_{Rn}{}^2 = \lambda_{Ln}{}^2 = \lambda_n{}^2$。

假设 K_R 与 K_L 对应于特征值 $\lambda_n{}^2$ 的特征函数分别为 Ψ_n

与Φ_n。则有规范正交性质：

$$\int \Phi_m(x)\overline{\Phi}_n(x)dx=\lambda_m\lambda_n\iiint K(y,x)\Psi_m(y)\overline{K}(z,x)\overline{\Psi}_n(z)dxdydz$$

$$=\lambda_m\lambda_n\iint K_R(z,y)\Psi_m(y)\overline{\Psi}_n(z)dydz$$

$$=\frac{\lambda_n}{\lambda_m}\int \Psi_m(z)\overline{\Psi}_n(z)dz \qquad (2.81)$$

完全类似，有

$$\int \Psi_m(x)\overline{\Psi}_n(x)dx=\frac{\lambda_n}{\lambda_m}\int \Phi_m(z)\overline{\Phi}_n(z)dz \qquad (2.82)$$

比较方程 (2.81) 与 (2.82)，若 $\lambda_m\neq\lambda_n$，则有

$$\int \Phi_m(x)\overline{\Phi}_n(x)dx=\int \Psi_m(x)\overline{\Psi}_n(x)dx=0$$

对 Φ_m 与 Ψ_n 规范化，使

$$\int |\Phi_m(x)|^2dx=\int |\Psi_m(x)|^2dx=1$$

从而 Φ_m 与 Ψ_m 组成了规范正交集合。

这样

$$K_R(x,y)=\sum_{s=1}^{\infty}\lambda_s^{-2}\Psi_s(x)\overline{\Psi}_s(y) \qquad (2.83)$$

$$K_L(x,y)=\sum_{s=1}^{\infty}\lambda_s^{-2}\Phi_s(x)\overline{\Phi}_s(y) \qquad (2.84)$$

显然，K_R与K_L可由核

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Phi_n(x)\overline{\Psi}_n(y)}{\lambda_n} \qquad (2.85)$$

生成。K_R与K_L也可借助任何形如

$$K(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\pm\frac{\Phi_n(x)\overline{\Psi}_n(y)}{\lambda_n} \qquad (2.86)$$

的核生成。应当指出，λ_n 不是K的特征值，事实上，这类核可能不存在特征值。

可以指出，第一类方程很容易借助K_L求解。为此，若

$$\int K(x,y)\phi(y)dy = f(x)$$

则

$$\int K_L(z,y)\phi(y)dy = \iint \overline{K}(z,x)K(x,y)\phi(y)dy$$

$$= \int \overline{K}(z,x)f(x)dx = g(z) \qquad (2.87)$$

对方程（2.87）的求解方法是熟知的，在一般情况下，其解由表达式

$$\phi(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \int g(z)\overline{\Phi}_n(z)dz \qquad (2.88)$$

给出。在特殊情况下，与前面的讨论一样，只需作适当的修改即可。

求解第二类积分方程，例如方程（2.71）稍微复杂些。假设

$$\iint [K(x,y)+\overline{K}(y,x)]\overline{\Phi}_r(x)\Phi_s(y)dxdy = k_{rs}$$

则

$$k_{rs} = \overline{k}_{sr}$$

且

$$K(x,y)+\overline{K}(y,x) = \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty} k_{rs}\Phi_r(x)\overline{\Phi}_s(y) \qquad (2.89)$$

同时，若

$$\int\left[f(x) - \lambda\int \overline{K}(y,x)f(y)dy\right]\overline{\Phi}_n(x)dx = F_n$$

则

$$f(x)-\lambda\int\overline{K}(y,x)f(y)dy=\sum_{n=1}^{\infty}F_n\Phi_n(x) \tag{2.90}$$

令

$$\phi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\Phi_n(x) \tag{2.91}$$

则利用式（2.89），（2.90）与（2.91），方程（2.71）可写成

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n\Phi_n(x)-\lambda\int\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}k_{rs}\Phi_r(x)\overline{\Phi}_s(y)\sum_{n=1}^{\infty}c_n\Phi_n(y)dy$$
$$+\lambda^2\int\sum_{s=1}^{\infty}\lambda_s^{-2}\Phi_s(x)\overline{\Phi}_s(y)\sum_{n=1}^{\infty}c_n\Phi_n(y)dy$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}F_n\Phi_n(x)$$

利用

$$\int\Phi_m(x)\overline{\Phi}_n(x)dx=\delta_{mn}$$

按通常的方法可得

$$c_r-\lambda\sum_{s=1}^{\infty}k_{rs}c_s+(\lambda^2/\lambda_s^2)c_r=F_r \tag{2.92}$$

这个方程组的可解性依赖于当 $r\neq s$ 时 k_{rs} 是否为零。

上面的讨论建立在特征函数集是完备的基础之上。如果这个集合不完备，需要象前面一样作适当的修改。

例 2.17

证明核

$$K(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx\cos ny}{n+i}\qquad -\pi\leqslant x,y\leqslant\pi$$

不存在特征值。并求相应的 K_R 与 K_L。

若存在一个特征值与特征函数，则它们必满足方程

$$\Phi(x)=\lambda\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx\cos ny}{n+i}\Phi(y)dy$$

然而，$\Phi(x)$必为如下形式

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx$$

但

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos ny \sin my dy = 0$$

故

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \cos ny}{n+i} \sum_{m=1}^{\infty} c_m \sin my dy = 0$$

从而，核不存在相应的特征值与特征函数。

现在

$$K_R(x,y) = \int \overline{K}(y,z) K(x,z) dz$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin ny \cos nz}{n-i} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin mx \cos mz}{m+i} dz$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \sin ny}{n^2+1}$$

似类地，

$$K_L(x,y) = \int \overline{K}(z,x) K(z,y) dz$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nz \cos nx}{n-i} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin mz \cos my}{m+i} dz$$

$$= \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx \cos ny}{n^2+1}$$

对应于K_L与 K_R 的特征值为 $(n^2+1)/\pi^2$， 规范化特征函数分别 为 $\sin nx/\sqrt{\pi}$，$\cos nx/\sqrt{\pi}$。

2.6 具有格林函数核的积分方程求解

考虑由下式定义的第二类非齐次积分方程

$$\phi(x)-\lambda\int_a^b K(x,y)\phi(y)dy=f(x) \quad a\leqslant x\leqslant b \tag{2.93}$$

其中

$$K(x,\ y)=\psi_1(y)\psi_2(x) \qquad a\leqslant y\leqslant x\leqslant b$$
$$=\psi_1(x)\psi_2(y) \qquad a\leqslant x\leqslant y\leqslant b$$

$\psi_1(x)$与 $\psi_2(x)$ 分别满足边界条件

$$\alpha\psi_1(a)+\alpha'\psi_1{}'(a)=0,\ \beta\psi_2(b)+\beta'\psi_2{}'(b)=0$$

将$K(x,y)$ 看作为x的函数并满足边界条件

$$\left[\alpha K(x,y)+\alpha'\frac{\partial k}{\partial x}(x,\ y)\right]_{x=a}=0$$

与

$$\left[\beta K(x,y)+\beta'\frac{\partial k}{\partial x}(x,\ y)\right]_{x=b}=0 \tag{2.94}$$

事实上，当边界条件为 (2.94) 时 $K(x,y)$是某一二阶微分方程的格林函数。（见1.3节）

方程 (2.93) 可写为

$$\phi(x)-\lambda\psi_2(x)\int_a^x\psi_1(y)\phi(y)dy$$
$$-\lambda\psi_1\ (x)\int_x^b\psi_2(y)\phi(y)dy=f(x) \tag{2.95}$$

关于x微分 (2.95) 得

$$\phi'(x)-\lambda\psi_2{}'(x)\int_a^x\psi_1(y)\phi(y)dy$$
$$-\lambda\psi_1{}'\ (x)\int_x^b\psi_2(y)\phi(y)dy=f'(x) \tag{2.96}$$

由此得

$$\alpha\phi(a)+\alpha'\phi'(a)=\alpha f(a)+\alpha'f'(a)$$
$$\beta\phi(b)+\beta'\phi'(b)=\beta f(b)+\beta'f'(b) \tag{2.97}$$

关于x微分 (2.96) 式，得

$$\phi''(x)-\lambda\psi_2''(x)\int_a^x\psi_1(y)\phi(y)dy-\lambda\psi_1''(x)\int_x^b\psi_2(y)\phi(y)dy$$

$$-\lambda[\psi_2'(x)\psi_1(x)-\psi_1'(x)\psi_2(x)]\phi(x)=f''(x) \quad (2.98)$$

消去量

$$\int_a^x\psi_1(y)\phi(y)dy \text{ 与 } \int_x^b\psi_2(y)\phi(y)dy$$

得到下面关于 $\phi(x)$的微分方程

$$0=\begin{vmatrix} \phi''(x)-\lambda[\psi_2'(x)\psi_1(x)-\psi_1'(x)\psi_2(x)]\phi(x)-f''(x) & \psi_1''(x) & \psi_2''(x) \\ \phi'(x)-f'(x) & \psi_1'(x) & \psi_2'(x) \\ \phi(x)-f(x) & \psi_1(x) & \psi_2(x) \end{vmatrix} \quad (2.99)$$

这是关于 ϕ的二阶微分方程，利用边界条件（2.97）可以唯一地解出ϕ来。注意，由于 $\phi''(x)$ 的系数 $\psi_1'(x)\psi_2(x)-\psi_1(x)\psi_2'(x)$ 不可能为零，否则 ψ_1 将是 ψ_2 的倍数，因此式（2.99）总是二阶微分方程。

若方程（2.93）是齐次的，即 $f(x)$ 为零，这时变成特征值问题，即求 λ 值使微分方程

$$0=\begin{vmatrix} \phi''(x)-\lambda[\psi_2'(x)\psi_1(x)-\psi_1'(x)\psi_2(x)]\phi(x) & \psi_1''(x) & \psi_2''(x) \\ \phi'(x) & \psi_1'(x) & \psi_2'(x) \\ \phi(x) & \psi_1(x) & \psi_2(x) \end{vmatrix} \quad (2.100)$$

在边界条件

$$\alpha\phi(a)+\alpha'\phi'(a)=0, \quad \beta\phi(b)+\beta'\phi'(b)=0 \quad (2.101)$$

下可解。

第一类积分方程也可类似地求解，同前面一样将核展开

$$\psi_2(x)\int_a^x \psi_1(y)\phi(y)dy+\psi_1(x)\int_x^b \psi_2(y)\phi(y)dy=f(x) \quad (2.102)$$

关于 x 微分上式，得

$$\psi_2'(x)\int_a^x \psi_1(y)\phi(y)dy+\psi_1'(x)\int_x^b \psi_2(y)\phi(y)dy=f'(x) \quad (2.103)$$

关于 x 再微分上式，得

$$\psi_2''(x)\int_a^x \psi_1(y)\phi(y)dy+\psi_1''(x)\int_x^b \psi_2(y)\phi(y)dy + [\psi_2'(x)\psi_1(x)-\psi_1'(x)\psi_2(x)]\phi=f''(x) \quad (2.104)$$

和前面完全一样可得

$$0=\begin{vmatrix} [\psi_1'(x)\psi_2(x)-\psi_2'(x)\psi_1(x)]\phi(x)+f''(x) & \psi_1''(x) & \psi_2''(x) \\ f'(x) & \psi_1'(x) & \psi_2'(x) \\ f(x) & \psi_1(x) & \psi_2(x) \end{vmatrix} \quad (2.105)$$

然而，即使方程（2.105）给出一个函数 $\phi(x)$，但积分方程实际上可能无解。因为它可能是不自相容的。利用方程（2.103）与（2.104）可以说明这种情况，方程（2.103）与（2.104）给出两个条件

$$\alpha f(a)+\alpha' f'(a)=0 \quad (2.106a)$$

$$\beta f(b)+\beta' f'(b)=0 \quad (2.106b)$$

若式（2.106）对 $f(x)$ 不成立，原给积分方程不自相容，因而无解。初看起来使人觉得奇怪，但其理由如下。

微分方程

$$\frac{d^2 f}{dx^2}+q(x)\frac{df}{dx}+r(x)f=\phi(x) \qquad a\leqslant x\leqslant b$$

满足边界条件

$$\alpha f(a)+\alpha' f'(a)=0,\quad \beta f(b)+\beta' f'(b)=0$$

的解由

$$f(x)=\int_a^b K(x,y)\phi(y)dy$$

给出，其中 $K(x,y)$ 满足同样的边界条件与微分方程

$$\frac{d^2k}{dx^2}+q(x)\frac{dk}{dx}+r(x)K=\delta(x-y)$$

事实上，K 为格林函数。

例 2.18

设 $K(x,y)=\sin x\cos y \qquad 0\leqslant x\leqslant y\leqslant \pi$

$\qquad\quad =\cos x\sin y \qquad 0\leqslant y\leqslant x\leqslant \pi$

讨论下列积分方程的解。

(i) $\phi(x)=\lambda\int_0^\pi K(x,y)\phi(y)dy+e^x$

(ii) $\phi(x)=\lambda\int_0^\pi K(xy)\phi(y)dy$

(iii) $\int_0^\pi K(x,y)\phi(y)dy=x-\dfrac{x^2}{2\pi}$

(iv) $\int_0^\pi K(x,y)\phi(y)dy=x$

由于

$$\int_0^\pi K(x,y)\phi(y)dy=\sin x\int_x^\pi \cos y\phi(y)dy$$

$$+\cos x\int_0^x \sin y\phi(y)dy$$

在这个核中

$$\psi_1(x)=\sin x,\qquad \psi_2(x)=\cos x$$

边界条件为

$$\psi_1(0)=0 \quad , \quad \psi_2'(\pi)=0$$

$$\frac{d}{dx}\int_0^\pi K(x,\ y)\phi(y)dy$$

$$=\cos x\int_x^\pi \cos y\phi(y)dy-\sin x\int_0^x \sin y\phi(y)dy$$

$$\int_0^\pi K(0,\ y)\phi(y)dy=0\ ,\quad \left[\frac{d}{dx}\int_0^\pi K(x,y)\phi(y)dy\right]_{x=\pi}=0$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\int_0^\pi K(x,y)\phi(y)dy=-\phi(x)-\int_0^\pi K(x,y)\phi(y)dy$$

（i） 首先求 ϕ所满足的边界条件，

$$\phi(0)=\lambda\int_0^\pi K(0,y)\phi(y)dy+1=1$$

$$\phi'(\pi)=\lambda\left[\frac{d}{dx}\int_0^\pi K(x,\ y)\phi(y)dy\right]_{x=\pi}+e^\pi=e^\pi$$

同时还有

$$\phi''(x)=\lambda\left[-\phi(x)-\int_0^\pi K(x,\ y)\phi(y)dy\right]+e^x$$

因此

$$\phi''(x)+(\lambda+1)\phi(x)=2e^x$$

应用边界条件，它可以很容易地解出。

(ii） 在这种情况下，完全同（i）一样有

$$\phi''(x)+(\lambda+1)\phi(x)=0$$

$$\phi(x)=A\sin\sqrt{\lambda+1}x+B\cos\sqrt{\lambda+1}x$$

由 $x=0$ 时$\phi(x)=0$，得 $B=0$

$$\phi'(x)=A\sqrt{\lambda+1}\cos\sqrt{\lambda+1}x$$

由 $\phi'(\pi)=0$,得

$$\sqrt{\lambda+1}=\frac{2n-1}{2}$$

其中 n 为正数。故特征值为

$$\lambda=1+\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2$$

对应的特征函数为

$$\sin(2n-1)x/2$$

(iii) 积分方程可以写为

$$\sin x\int_x^\pi \cos y\phi(y)dy+\cos x\int_0^x \cos y\phi(y)dy=x-\frac{x^2}{2\pi}$$

微分上式得

$$\cos x\int_x^\pi \cos y\phi(y)dy-\sin x\int_0^x \cos y\phi(y)dy=1-\frac{x}{\pi}$$

在这两个方程中分别令 $x=0$ 与 $x=\pi$，出现了 $0=0$ 的结果。

将上式再微分得

$$-\phi(x)-\int_0^\pi K(x,\ y)\phi(y)dy=-\frac{1}{\pi}$$

因此

$$\phi(x)=\frac{\pi}{\pi}-x+\frac{x^2}{2\pi}$$

(iv) 在原积分方程中令 $x=0$ 得到 $0=0$。然而，关于 x 微分得到

$$\cos x\int_x^\pi \cos y\phi(y)dy-\sin x\int_0^x \cos y\phi(y)dy=1$$

令 $x=\pi$，得 $0=1$。因而积分方程是不相容的，没有通常函数解，但可以看出 $\phi(y)=\delta(\pi-y)$ 是一个形式解。

2.7 杂 录

(a) 奇异积分方程

在 1.4(a) 节中曾指出，若核的定义域是无限的，或在

定义域内核有奇点，而且这一奇点不能通过变换去掉，则称积分方程为奇异的。这时本章大部分理论不能应用。因为

$$\int |K(x,\ y)|^2 dx,\ \int |K(x,\ y)|^2 dy \text{与} \iint |K(x,y)|^2 dx dy$$

并非都有限，所以定理中的收敛性条件不能满足。在 2.2 节中关于退化核的某些结果仍可应用，2.5 节的思想是有用的，但希尔伯特-施密特定理和它的推论将不再成立了，对奇异积分方程要作特殊的处理。

例 2.19

求积分方程

$$\phi(x)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|}\phi(y)dy$$

的特征值与特征函数。

由于

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|K(x,\ y)|^2 dx dy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|x-y|} dy=\int_{-\infty}^{\infty} dx$$

是无限的，故方程为奇异的。

积分方程可重写为

$$\phi(x)=\lambda\left[e^{-x}\int_{-\infty}^{x} e^{y}\phi(y)dy+e^{x}\int_{x}^{\infty} e^{-y}\phi(y)dy\right]$$

这个方程可根据 2.5 节指出的方法处理，并有

$$\phi''(x)+(2\lambda-1)\phi(x)=0$$

令 $\lambda=(1-p^2)/2$，则解的形式将为

$$\phi(x)=A+Bx \qquad p=0$$

$$=Ae^{px}+Be^{-px} \qquad p\neq 0$$

当 $\phi(y)=1$ 或 $\phi(y)=y$ 时，积分

$$\int_{-\infty}^{x} e^{y}\phi(y)dy \text{ 与 } \int_{x}^{\infty} e^{-y}\phi(y)dy$$

皆收敛。且 $\lambda=\frac{1}{2}$为重特征值，其相应的特征函数为 1 与 x。然而，应当指出，当 $p=0$ 时

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\phi(x)|^2dx$$

是无限的。同时，当 $\phi(y)=e^{ky}$ 时，只要 $R_e k<1$，积分

$$\int_{-\infty}^{x}e^{y}\phi(y)dy$$

是收敛的。只要，$R_e k>-1$，积分

$$\int_{x}^{\infty}e^{-y}\phi(y)dy$$

是收敛的。这样 $\lambda=(1-p^2)/2$ 是重特征值，相应的特征函数为 e^{px}，e^{-px}，只要 $|Rep|<1$。如果 p 不满足此条件，积分方程中的积分不收敛。这时

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\phi(x)|^2dx$$

是无限的。若 p 为纯虚数，例如 iq，$\lambda=(1+q^2)/2$，特征函数为 $\sin qx$ 与 $\cos qx$。

因此，这个微分方程有连续的谱，而没有离散序列的特征值，这是因为核是奇异的。

例 2.20

解积分方程

$$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_{0}^{\infty}e^{-x^2/(4t)}\phi(x)dx=1$$

令 $x^2=u$，$t=(4p)^{-1}$ 这时积分方程变为下面的形式

$$\left(\frac{p}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\int_{0}^{\infty}e^{-pu}\frac{\phi(u^{\frac{1}{2}})}{u^{\frac{1}{2}}}du=1$$

或

$$\int_0^\infty e^{-pu}\frac{\phi(u^{\frac{1}{2}})}{u^{\frac{1}{2}}}du=\left(\frac{\pi}{p}\right)^{\frac{1}{2}}$$

因此原方程的解等价于寻求一函数$F(u)=u^{-\frac{1}{2}}\phi(u^{-\frac{1}{2}})$使它的拉普拉斯变换是$(\pi/p)^{1/2}$。事实上这个函数为 $u^{-\frac{1}{2}}$。即

$$u^{-\frac{1}{2}}\phi(u^{\frac{1}{2}})=F(u)=u^{-\frac{1}{2}}$$

因此

$$\phi(u)=1$$

(b) 多维积分方程

正如已经看到的，几乎在本章所有的地方，都没有指出 x，y 的区域。通常，我们考虑形式如

$$\int K(x,y)\phi(y)dy$$

的积分。应当说明的是这个积分以及与它关联的弗雷德霍姆积分方程理论，并非只理解为一维的问题。事实上 x 与 y 可代表变量集 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 与 $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$。虽然在 2.2，2.3 与 2.4 节的理论中仔细考虑过的积分

$$\int K(x,y)\phi(y)dy$$

一个直接的理解是

$$\int_a^b K(x,y)\phi(y)dy$$

我们也将证明把积分$\int K(x,y)\phi(y)dy$ 理解为

$$\int_{a_1}^{b_1}\cdots\int_{a_n}^{b_n}K(x_1, x_2,\cdots,x_n y_1, y_2,\cdots,y_n)dy_1\cdots dy_n$$

$$a_1 \leqslant x_1 b_1; \quad \cdots \quad a_n \leqslant x_n \leqslant b_n$$

时，这些理论也是成立的。

例 2.21

解积分方程

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\infty}\log\{r^2 - 2rr'\cos(\phi-\phi')$$

$$+r'^2\}p(r',\phi')r'dr'd\phi' = f(r,\phi)$$

$$0 \leqslant r, \quad -\pi \leqslant \phi \leqslant \pi$$

我们暂不考虑维数的因素，这个问题等价于从已知的二维静电势 f 去求二维的静电荷分布 p。

处理的方法是将各项展成ϕ和ϕ'的傅立叶级数。

令

$$r'p(r',\phi') = \frac{1}{2\pi}P_0 + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(P_n\cos n\phi' + Q_n\sin n\phi')$$

其中 P_n 与 Q_n 是 r' 的函数

$$f(r,\phi) = \frac{1}{2}f_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(f_n\cos n\phi + g_n\sin n\phi)$$

其中

$$f_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(r,\phi)\cos n\phi d\phi \qquad n \geqslant 0$$

$$g_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(r,\phi)\sin n\phi d\phi \qquad n > 0$$

f_n 与 g_n 为 r的函数。

现在，若 $0 \leqslant a \leqslant 1$ 时，有

$$\log\{1 - 2a\cos(\phi-\phi') + a^2\} = -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n}\cos n(\phi-\phi')$$

$$= -2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n}(\cos n\phi\cos n\phi' + \sin n\phi\sin n\phi')$$

则 $$\log(r^2 - 2rr'\cos\phi - \phi' + r'^2)$$

$$= G_0(r, r') + \sum_{m=1}^{\infty} G_m(r, r')(\cos m\phi\cos m\phi' + \sin m\phi\sin m\phi')$$

其中

$$G_0(r, r') = 2\log r \qquad r > r'$$
$$= 2\log r' \qquad r < r'$$

$$\left.\begin{aligned} G_m(r, r') &= \frac{2a^m}{m}\left(\frac{r'}{r}\right)^m \qquad r > r' \\ &= \frac{2a^m}{m}\left(\frac{r}{r'}\right)^m \qquad r < r' \end{aligned}\right\} m > 0$$

积分方程变为

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} G_m(r, r')(\cos m\phi\cos m\phi' + \sin m\phi\sin m\phi')$$
$$\left[\frac{1}{2\pi}P_0(r') + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\{P_n(r')\cos n\phi' + Q_n(r')\sin n\phi'\}\right]dr'd\phi'$$

$$= \frac{1}{2}f_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty}\{f_n(r)\cos n\phi + g_n(r)\sin n\phi\}$$

左边变为

$$\int_0^{\infty} G_0(r, r')P_0(r')dr + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty} G_n(r, r')P_n(r')dr'\cos n\phi d\phi$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty} G_n(r, r')Q_n(r')dr'\sin n\phi d\phi$$

因而，原方程的解等价于无穷积分方程组

$$\int_0^{\infty} G_0(r, r')P_0(r')dr' = \frac{1}{2}f_0(r)$$

$$\int_0^\infty G_n(r,r')P_n(r')dr' = f_n(r) \qquad n>0$$

$$\int_0^\infty G_n(r,r')Q_n(r')dr' = g_n(r) \qquad n>0$$

的解，其中第一个方程可写成

$$\log r\int_0^r P_0(r')dr' + \int_r^\infty \log r' P_0(r')dr' = \frac{1}{4}f_0(r)$$

经微分后，得

$$\frac{1}{r}\int_0^r P_0(r')dr' = \frac{1}{4}f_0'(r)$$

因此

$$P_0(r) = \frac{1}{4}\frac{d}{dr}(rf_0'(r))$$

在 f_0 上必须强加一定的条件，代回原方程，不计因子$\frac{1}{4}$，

有

$$\log r\int_0^r \frac{d}{dr'}\left(r'\frac{df_0(r')}{dr'}\right)dr' + \int_r^\infty \log r'\frac{d}{dr'}\left\{r'\frac{df_0(r')}{dr'}\right\}dr'$$

$$= \log r\Big[_0^r\,[r'f_0'(r')] + \Big[_r^\infty\,[r'\log r' f_0'(r')]$$

$$-\int_r^\infty f_0'(r')dr'$$

$$= \log r\Big[_0^r\,[r'f_0'(r')] + \Big[_r^\infty[f_0'(r')r'\log r' - f_0(r')]$$

可见，使上式等于 $f_0(r)$ 的条件是

$$\lim_{r\to 0} rf_0(r) = 0$$

且

$$\lim_{r\to\infty}[r\log r f_0'(r) - f_0(r)] = 0$$

类似地，第二个方程可写为

$$-\frac{2a^n}{n}\left[\frac{1}{r^n}\int_0^r r'^n P_n(r')dr' + r^n\int_r^\infty \frac{1}{r'^n}P_n(r')dr'\right]$$

$$= f_n(r)$$

将因子 $-\frac{n}{2a^n}$ 归并到 $f_n(r)$ 中，这时可写为

$$\frac{1}{r^n}\int_0^r r'^n P_n(r')dr' + r^n\int_r^\infty \frac{1}{r'^n}P_n(r')dr' = f_n(r)$$

关于 r 微分，得

$$-\frac{n}{r^{n+1}}\int_0^r r'^n P_n(r')dr' + nr^{n-1}\int_r^\infty \frac{1}{r'^n}P_n(r')dr'$$

$$= f'_n(r)$$

关于 r 再微分，得

$$\frac{n(n+1)}{r^{n+2}}\int_0^r r'^n P_n(r')dr' + n(n-1)r^{n-2}\int_r^\infty \frac{1}{r'^n}P_n(r')dr'$$

$$-\frac{n}{r}P_n(r) - \frac{n}{r}P_n(r) = f_n''(r)$$

由前两个方程，有

$$\frac{1}{r^n}\int_0^r r'^n P_n(r')dr' = \frac{1}{2n}\{nf_n(r) - rf_n'(r)\}$$

与

$$r^n\int_r^\infty r'^n P_n(r')dr' = \frac{1}{2n}\{nf_n(r) + rf_n'(r)\}$$

由此推得

$$\frac{(n+1)}{2r^2}[nf_n - rf_n'] + \frac{(n-1)}{2r^2}[nf_n + rf_n']$$

$$-\frac{2n}{r}P_n(r) = f_n''(r)$$

因此

$$P_n(r)=\frac{1}{2n}\left[rf_n''(r)+f_n'(r)-\frac{n^2}{r}f_n\right]$$

关于上述诸积分的收敛条件，留给读者作为练习。

完全一样可以得到解 $Q_n(r')$，因此只要收敛性条件满足，则解 $P(r',\phi')$ 存在。

(c) 加权积分方程

区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上的积分概念可以按下面的方式给以推广：假设在这区间中有 n 个点x_r，满足$a\leqslant x_1<\cdots x_r<x_{r+1}<\cdots<x_n\leqslant b$，且其中每一点 x_r 对应一个正数 ω_r，称它为加权因子。

假设 $f(x)$ 为 $a\leqslant x\leqslant b$ 上的可积函数，并且在包含点 x_r 的某个区间上是连续的。那么推广了的积分概念可以定义为

$$\int_a^{\bar{b}} f(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\sum_{r=1}^{n}\omega_r f(x_r) \qquad (2.107)$$

由于所有的ω_r为正数，可见

$$\int_a^{\bar{b}} f(x)dx\geqslant 0, \text{若 } f(x)\geqslant 0 \quad \text{当 } a\leqslant x\leqslant b \text{ 时}$$

据此，当我们在方程（2.107）的意义之下理解积分号时，几乎本章前面讨论的有关弗雷德霍姆积分方程的理论都成立（没有必要详述，因为读者会很容易地把它们写出）。因此可借助类似于前面讨论过的技巧求解积分方程，其中积分 $\int K(x,y)\phi(y)dy$ 理解为

$$\int_a^b K(x,y)\phi(y)dy+\sum_{r=1}^{n}\omega_r K(x,x_r)\phi(x_r)$$

例 2.22

解积分方程

$$\int_0^{\bar{1}} K(x,y)\phi(y)dy = f(x)$$

其中

$$\int_0^{\bar{1}} g(y)dy = \int_0^1 g(y)dy + g\left(\frac{1}{2}\right)$$

且

$$K(x,y) = x \qquad 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1$$
$$= y \qquad 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 1$$

加权积分方程变为

(a) $\int_0^x y\phi(y)dy + x\int_x^1 \phi(y)dy + x\phi\left(\frac{1}{2}\right) = f(x)$

$$0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$$

(b) $\int_0^x y\phi(y)dy + x\int_x^1 \phi(y)dy + \frac{1}{2}\phi\left(\frac{1}{2}\right) = f(x)$;

$$\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$$

关于 x 微分，可得

(c) $\int_x^1 \phi(y)dy + \phi\left(\frac{1}{2}\right) = f'(x) \qquad 0 \leqslant x < \frac{1}{2}$

(d) $\int_x^1 \phi(y)dy = f'(x) \qquad \frac{1}{2} < x \leqslant 1$

关于 x 再微分，(c) 与 (d) 分别得到

(e) $\phi(x) = -f''(x) \qquad 0 \leqslant x < \frac{1}{2}$

(f) $\phi(x) = -f''(x) \qquad \frac{1}{2} < x \leqslant 1$

方程（e）与（f）表面上是相同的，但在方程（c）与（d）中令 $x=\frac{1}{2}$时，将出现一些困难，因为这时出现了不相容性。相容性条件可按下面的方式给出。

假设

$$f(x)=f_1(x) \qquad 0\leqslant x<\frac{1}{2}$$

$$=f_2(x) \qquad \frac{1}{2}<x\leqslant 1$$

因为 $\phi(x)$ 在 $x=\frac{1}{2}$上有定义，并在包含$\frac{1}{2}$的某区间是连续的。由方程（e）与（f）得 $f_1''\left(\frac{1}{2}\right)=f_2''\left(\frac{1}{2}\right)$。在方程（$c$）与（$d$）中令$x=\frac{1}{2}$得到了另一个相容性条件，即 $f_1'\left(\frac{1}{2}\right)-f_2'\left(\frac{1}{2}\right)=\phi\left(\frac{1}{2}\right)=f_1''\left(\frac{1}{2}\right)=f_2''\left(\frac{1}{2}\right)$。由方程($d$)得$f_1'(1)=0$。在方程($a$)与($b$)中令 $x=\frac{1}{2}$，得 $f_1\left(\frac{1}{2}\right)=f_2\left(\frac{1}{2}\right)$，在方程（$a$）中令，$x=0$，得 $f(0)=0$。由此，积分方程的解由

$$\phi(x)=-f_1''(x) \qquad 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$$

$$=-f_2''(x) \qquad \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$$

给出，只要所有的相容性条件都满足。

练　　习

1. 关于 $\phi(x)$，解积分方程

$$\phi(x)=\lambda\int_{-\pi}^{\pi}\sin(x+t)\phi(t)dt \qquad -\pi\leqslant x\leqslant\pi$$

当 $\lambda=\pm 1/\pi$ 时，讨论解。 (Wales)

2. 解积分方程

$$\phi(x)=\cos ax+\int_{-\pi}^{\pi}\cos(x+2y)\phi(y)dy \quad -\pi\leqslant x\leqslant\pi \quad \text{(Wales)}$$

3. 求积分方程

$$\phi(x)=\lambda\int_{-\pi}^{\pi}(\cos x\cos 5y+\cos 5x\cos y)\phi(y)dy \quad -\pi\leqslant x\leqslant\pi$$

的特征值与规范正交特征函数。

4. 证明积分方程

$$\phi(x)=\lambda\int_0^1 xe^t\phi(t)dt+f(x) \qquad \lambda\neq 1$$

的解为

$$\phi(x)=f(x)+\frac{\lambda}{1-\lambda}\int_0^1 xe^t f(t)dt$$

当 $\lambda=1$ 时，讨论解。

5. 证明积分方程

$$\phi(s)=\lambda\int_0^{\pi}(\sin s\cdot\sin 2t+\sin 3s\cdot\sin 4t)\phi(t)dt$$

不存在非平凡解。

6. 定义函数序列 $f_n(x)$：

$$f_1(x)=f(x),\quad f_{n+1}(x)=f(x)+\lambda\int K(x,y)f_n(y)dy, n>1$$

证明，若

$$\phi(x)-\lambda\int K(x,y)\phi(y)dy=f(x)$$

则

$$\phi(x)-\lambda^n\int K_n(x,y)\phi(y)dy=f_n(x)$$

7. 核$K(x,y)$有一个对应P个特征函数的特征值，证明

$$P\leqslant|\lambda|^2\iint|k(x,y)|^2dxdy$$

8. 证明方程

$$\phi(x)=\lambda\int_{-1}^{1}(x^4-x^2)(4t^3+3t)\phi(t)dt$$

不存在任何特征值。

9. 说明，求积分方程

$$\phi(x)=\lambda\int K(x,y)\phi(y)dy$$

的最小特征值等价于求

$$\iint\overline{\phi}(x)K(x,y)\phi(y)dxdy$$

的最大值，其中 $\iint|\phi(x)|^2dx=1$，K 为正定的埃尔米特核。

10. 设 $K(x)$是周期为 2π 的偶函数。证明积分方程

$$\phi(x)=\lambda\int_{-\pi}^{\pi}K(x-y)\phi(y)dy$$

的特征值与对应的特征函数是

$$\left[\int_{-\pi}^{\pi}K(x)\cos nxdx\right]^{-1} \text{与} \cos nx, \ \sin nx \ (n\text{为正整数})，$$

而当 $n=0$ 时特征值与特征函数是

$$\left[\int_{-\pi}^{\pi}K(x)dx\right]^{-1}\text{与}\,1。$$

11. 设

$$K(x,y)=(1-x)y \qquad 0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1$$
$$=(1-y)x \qquad 0\leqslant x\leqslant y\leqslant 1$$

证明

$$K(x,y)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\pi x\sin n\pi y}{n^2\pi^2}$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

12． 证明积分方程

$$\phi(x) = \lambda\int K(x,y)\phi(y)dy$$

的一个特征函数若有界必连续，其中 K有界。

13． 证明斜对称核，$\{K(x,y)+K(y,x)=0\}$，只有纯虚数特征值。

14． 证明，若 λ_r，λ_s 为核 K的特征值（$r\neq s$），且若

$$\Phi_r(x) = \lambda_r\int K(x,y)\Phi_r(y)dy$$

$$\Psi_s(x) = \lambda_s\int K(y,x)\Psi_s(y)dy$$

则

$$\int \Phi_r(x)\Psi_s(x)dx = 0$$

$$\iint \Phi_r(x)K(y,x)\Psi_s(y)dxdy = 0$$

15． 证明积分方程

$$\phi(x) = \lambda\int K(x,y)P(y)\phi(y)dy + f(x)$$

其中 $P(y)>0$，在定义域中可以通过变换

$$\psi(x) = \{P(x)\}^{1/2}\phi(x)$$

化为对称核积分方程。

16． 证明对应于正定核的所有特征值为正数

17． 证明，若$|a|<1$，积分方程

$$\phi(x) = \frac{\lambda}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-a^2}{1-2a\cos(\ \ -t)+a^2}\phi(t)dt \quad -\pi\leqslant x\leqslant\pi$$

对应于特征值

$$\lambda_0 = 1，\lambda_{2r-1} = \frac{1}{a^r}，\quad \lambda_{2r} = \frac{1}{a^r}$$

的规范特征函数为

$$\phi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad \phi_{2r-1}(x)=\frac{\sin rx}{\sqrt{\pi}},$$

$$\phi_{2r}(x)=\frac{\cos rx}{\sqrt{\pi}}$$ (Wales)

18. 求积分方程

$$\phi(x)=\lambda\int_{-\pi}^{\pi}B(x,y)\phi(y)dy \qquad -\pi\leqslant x\leqslant\pi$$

的特征值与正交规范特征函数。其中

$$B(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx\sin ny$$

并指出使全部特征值为正时，b_n应满足的条件。 (Wales)

19. 解积分方程

$$\phi(x)-\lambda\int_0^{\pi}K(x,t)\phi(t)dt=3 \qquad 0\leqslant x\leqslant\pi$$

其中

$$K(x,t)=\sin x\cos t \qquad 0\leqslant x\leqslant t\leqslant\pi$$
$$=\sin t\cos x \qquad 0\leqslant t\leqslant x\leqslant\pi$$

20. 求对应于积分方程

$$\phi(x)=\lambda\int_0^1 K(x,y)\phi(y)dy \qquad 0\leqslant x\leqslant 1$$

$$K(x,y)=(x+1)(y-2) \qquad 0\leqslant x\leqslant y\leqslant 1$$
$$=(y+1)(x-2) \qquad 0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1$$

的特征函数的微分方程以及边界条件。

21. 设$\Phi_n(x)$，$\Psi_n(x)$为正交规范函数集合，即

$$\int\Phi_m(x)\Psi_n(x)dx=\delta_{mn}$$

设

$$K(x,y)=\sum_n\frac{\Phi_n(x)\psi_n(y)}{\lambda_n}$$

$$f_n = \int f(x)\Psi_n(x)dx$$

证明

（i） 积分方程

$$\phi(x) = \lambda\int K(x,y)\phi(y)dy$$

的特征值与对应的特征函数分别为 λ_n 与 $\Phi_n(x)$。

（ii） 积分方程

$$\int K(x,y)\phi(y)dy = f(x)$$

的解为

$$\phi(y) = \sum_n \lambda_n f_n \Phi_n(y)$$

（iii） 积分方程

$$\phi(x) = \lambda\int K(x,y)\phi(y)dy + f(x)$$

的解为

$$\phi(x) = \sum_n \frac{f_n\lambda_n}{\lambda_n - \lambda}\Phi_n(x)$$

（应用类似于2.3节。特殊情况下的条件并作微小改动）

22. 解积分方程

（i） $\phi(x) - \int_0^a K(x,y)\phi(y)dy = e^{2x}$

（ii） $\phi(x) = \lambda\int_0^a K(x,y)\phi(y)dy$

（iii） $\int_0^a K(x,y)\phi(y)dy = x(a-x)$

其中

$$K(x,y)=\sinh(x-a)\sinh y \qquad 0\leqslant y\leqslant x\leqslant a$$
$$=\sinh x\sinh(y-a) \qquad 0\leqslant x\leqslant y\leqslant a$$

讨论下列积分方程的可能性

(a) $\int_0^a K(x,y)\phi(y)dy=f(x)$

(b) $\int_0^a K(x,y)\phi(y)dy=g(x)[g(x)-g(a)]$

23. 证明，若积分方程

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|}\phi(y)dy=f(x)$$

的解存在，它是

$$\frac{1}{2}\{f(x)-f''(x)\}$$

并指出，要使解有意义，$f(x)$应满足的条件。

24. 假若与核

$$K(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}k_{mn}\Phi_m(x)\overline{\Phi}_n(y)$$

相联系的叠核为

$$K_R(x,y)=\sum_{s=1}^{\infty}\lambda_s^{-2}\Phi_s(x)\overline{\Phi}_s(y)$$

求系数 k_{mn} 应满足的条件。

25. 证明积分方程

$$\phi(s)=\lambda(1-s)\int_0^s \phi(t)dt+\lambda\int_s^1(1-t)\phi(t)dt$$
$$+\lambda(1-s)\phi(0)$$

的特征函数形为

$$\cos\lambda^{\frac{1}{2}}\sin\lambda^{\frac{1}{2}}x-\sin\lambda^{\frac{1}{2}}\cos\lambda^{\frac{1}{2}}x$$

并求λ的可能值。

26. 解积分方程

$$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_0^{\infty} e^{-x^2/(4t)}\phi(x)dx = t$$

27. 证明积分方程

$$\phi(x) = f(x) + \lambda\int K(x,y)\phi(y)dy$$

的一个形式解为

$$\phi(x) = f(x) + \frac{\lambda\int D(x,y;\lambda)\phi(y)dy}{D_0(\lambda)}$$

其中

$$D(x, y;\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^n}{n!}G_n(x,y)$$

$$G_n(x,y) = d_n K(x,y) - n\int G_{n-1}(x,z)K(z,y)dz \qquad n\geqslant 0$$

$$G_0(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^n}{n!}d_n \qquad d_0 = 1$$



3. 伏尔特拉积分方程

3.1 伏尔特拉方程的类型

若核$K(x,y)$满足

$$K(x,y)=0,\quad y>x \tag{3.1}$$

时称它为伏尔特拉型核。显然，这种核不能为对称核或埃尔米特核。在本书中，我们假设它为实核，但是，一般来说，所讲述的理论对于复核也是成立的。

现在我们考虑线性积分方程的三种可能类型，它们分别是

第一类方程：

$$f(x)=\int_0^x K(x,y)\phi(y)dy \tag{3.2}$$

第二类方程：

$$\phi(x)=\lambda\int_0^x K(x,y)\phi(y)dy+f(x) \tag{3.3}$$

齐次的第二类方程

$$\phi(x)=\lambda\int_0^x K(x,y)\phi(y)dy \tag{3.4}$$

稍有意外是这种伏尔特拉积分方程的处理与弗雷德霍姆积分方程有些不同。只是为了方便，在这里才取积分下限为零，因对于任意的积分限，只要取一适当变换，即可变为这种情形。

下面的一些性质可以立即得到：

（i）第一类积分方程相容的必要条件为 $f(0)=0$。但是不相容的方程，有时可借助于广义函数求解。

（ii）第二类积分方程的解必须满足 $\phi(0)=f(0)$。

（iii）如同在1.4(b)节已经看到的，若K是非奇异的，

则第二类齐次方程（3.4）不存在任何特征值与对应的特征函数。

(iv) 在前面 1.4(*b*) 节已经看到，微分第一类积分方程（3.2）可以得到等价的方程

$$K(x,x)\phi(x)+\int_0^x \frac{\partial K(x,y)}{\partial x}\phi(y)dy=f'(x) \qquad (3.5)$$

若$K(x,x)$恒为零，则得到一个具有核

$$\frac{\partial K(x,y)}{\partial x}$$

的另一个第一类积分方程。若 $K(x,x)$ 不恒为零，方程（3.5）可写成

$$\phi(x)=\int_0^x K^*(x,y)\phi(y)dy+g(x) \qquad (3.6)$$

其中

$$K^*(x,y)=-\frac{\partial K(x,y)}{\partial x}\Big/K(x,x)$$

$$g(x)=f'(x)/K(x,x)$$

在这种情况下，

$$\phi(0)=g(0$$

若 $K(x,x)$在某一点为零，则 $K^*(x,y)$ 为奇异核。

寻求伏尔特拉方程的解，相对弗雷德霍姆积分方程而言，通常从更直观的方式入手。

例 3.1

解积分方程

$$x^2=\int_0^x \sin a(x-y)\phi(y)dy \qquad a\neq 0 \qquad (\text{i})$$

关于 x 微分，得到

$$2x = a\int_0^x \cos a(x-y)\phi(y)dy \qquad \text{(ii)}$$

关于 x 再微分一次，得

$$2 = a\phi(x) - a^2\int_0^x \sin a(x-y)\phi(y)dy = a\phi(x) - a^2x^2$$

因此

$$\phi(x) = a^{-1}(2 + a^2x^2)$$

事实上，这个方程可解是很幸运的。因为积分核关于 x 微分两次后又回到了它原来的形式。可以看出，$x=0$ 时的相容条件都在方程（i）与（ii）中被满足。

例 3.2

解积分方程

$$1 = \int_0^x \cos a(x-y)\phi(y)dy$$

令 $x=0$，方程两边不相容。但是可以证明函数

$$\phi(x) = \delta(x) + a^2\lambda$$

形式上满足方程，它是一个广义函数解。

例 3.3

解积分方程

$$\phi(x) = 3\int_0 \cos(x-y)\phi(y)dy + e^x$$

可见 $\phi(0)=1$，关于 x 微分，得到

$$\phi'(x) = 3\phi(x) - 3\int_0^x \sin(x-y)\phi(y)dy + e^x$$

因而

$$\phi'(0) = 3\phi(0) + 1 = 4$$

关于x再微分，有

$$\phi''(x)=3\phi'(x)-3\int_0^x\cos(x-y)\phi(y)dy+e^x$$
$$=3\phi'(x)-\phi(x)+2e^x$$

这个微分方程可以很容易地求解。

现在考虑形式如

$$\phi(x)+\int_0^x\sum_{p=0}^{n-1}k_p(x)u^{p-1}\phi(u)du=g(x)$$

的积分方程。它可以写成

$$\phi(x)+\sum_{q=1}^{n}l_q(x)\int_0^x\frac{(x-u)^{q-1}}{(q-1)!}\phi(u)du=g(x) \quad (3.7)$$

的形式。关于x微分，并应用附录A的结果，得

$$\phi'(x)+l_1(x)\phi(x)+l_1'(x)\int_0^x\phi(u)du$$
$$+\sum_{q=2}^{n}l_q(x)\int_0^x\frac{(x-u)^{q-2}}{(q-2)!}\phi(u)du$$
$$+\sum_{q=2}^{n}l_q'(x)\int_0^x\frac{(x-u)^{q-1}}{(q-1)!}\phi(u)du=g'(x) \quad (3.8)$$

在式（3.7）与（3.8）中消去量

$$\int_0^x(x-u)^{q-1}\phi(u)du$$

得到方程

$$\phi'(x)+m_1(x)\phi(x)$$
$$+\sum_{q=2}^{n}m_q(x)\int_0^x\frac{(x-u)^{q-2}}{(q-2)!}\phi(u)du=g_1(x)$$

这个过程可重复n次，得到如下形式的微分方程

$$\phi^{(n)}(x)+\sum_{s=1}^{n}a_s(x)\phi^{(n-s)}(x)=g_n(x)$$

及相应的初始条件

$\phi(0)=g(0)$，$\phi'(0)+m_1(0)\phi(0)=g_1(0)$，等等。

例 3.4

解积分方程

$$\phi(x)=x+1+\int_0^x[1+2(x-y)]\phi(y)dy$$

微分一次，得

$$\phi'(x)=1+\phi(x)+2\int_0^x\phi(y)dy$$

且 $\phi(0)=1$，$\phi'(0)=1+\phi(0)=2$

再微分一次，得

$$\phi''(x)=\phi'(x)+2\phi(x)$$

由此可得到解。

3.2 伏尔特拉方程的预解核

考虑第二类伏尔特拉方程

$$\phi(x)=\lambda\int_0^x K(x,y)\phi(y)dy+f(x)$$

如同在 2.2 节末尾所讨论的方法，我们可以求出上面方程的λ幂级数形式的解。这时叠核定义为

$$K_n(x,y)=\int_y^x K(x,z)K_{n-1}(z,y)dz \quad n\geqslant 2 \qquad (3.9)$$

借助下面的关系定义一个函数迭代序列$\{\phi_n(x)\}$

$$\phi_0(x)=f(x)$$

$$\phi_n(x)=\lambda\int_0^x K(x,y)\phi_{n-1}(y)dy+f(x)$$

由此得

$$\phi_n(x)=f(x)+\sum_{s=1}^n\lambda^s\int_0^x K_s(x,y)f(y)dy \qquad (3.10)$$

因此序列 $\phi_n(x)$生成一个 λ 的幂级数

$$\phi(x)=f(x)+\sum_{s=1}^{\infty}\lambda^{s}\int_{0}^{x}K_{s}(x,y)f(y)dy \tag{3.11}$$

$$=f(x)-\lambda\int_{0}^{x}R(x,y;\lambda)f(y)dy \tag{3.12}$$

因而预解核为

$$R(x,y;\lambda)=\sum_{s=1}^{\infty}\lambda^{s-1}K_{s}(x,y) \tag{3.13}$$

余下的问题是确定在什么条件下方程（3.11）右端的幂级数是收敛的。

假设，在区间 $0\leqslant x,\ y\leqslant l$ 上 $|K(x,y)|\leqslant k$

则

$$|K_2(x,y)|=\left|\int_{y}^{x}K(x,z)K(z,y)dz\right|\leqslant k^2(x-y)\quad x\geqslant y$$

及

$$K_2(x,y)=0\qquad x\leqslant y$$

类似地

$$|K_3(x,y)|=\left|\int_{y}^{x}K_2(x,z)K(z,y)dz\right|\leqslant k^3\int_{y}^{x}(x-z)dz$$

$$=\frac{1}{2}k^3(x-y)^2\qquad x\geqslant y$$

及

$$K_3(x,y)=0\qquad x\leqslant y$$

按此途径进行下去，得

$$|K_n(x,y)|\leqslant\frac{1}{(n-1)!}k^n(x-y)^{n-1}\qquad x\geqslant y$$

$$=0\qquad x\leqslant y$$

因而，具有第 n 项为 $\lambda^n K_n(x,y)$ 的级数被具有第 n 项为

$$\frac{\lambda^n}{(n-1)!}K^n(x-y)^{n-1}$$

的级数所控制。(如果一个正项级数的每一项都不小于第二个级数的对应项，则称它控制了另一个正项级数，因此，若控制级数收敛，则被控制的级数也收敛）。

由于

$$|x-y|\leqslant 2l$$

因而，后面的级数又被具有第 n 项为

$$\lambda^n k\frac{(2lk)^{n-1}}{(n-1)!}$$

的级数控制。而这是指数级数的一般项，从而得知关于 $R(x,y;\lambda)$ 的级数式 (3.12) 总是收敛的。

应当记得，对于弗雷德霍姆核，定义其预解核的λ的幂级数仅对小于第一个特征值的模的 λ 才收敛。换句话说，第一个特征值的模大于任何使这个级数收敛的 λ 值的模。伏尔特拉核是弗雷德霍姆核的特殊形式。对于它，如果原核是有界的，则定义预解核的级数对所有 λ 都是收敛的，等效地说，这种核不存在任何特征值。上面讨论的对弱奇性核也成立。那时叠核实际上变成了非奇异的，证明可以作适当的修改。式 (3.12)解的唯一性可以很容易地得到。因为，如果 $\phi^A(x)$, $\phi^B(x)$ 为两个解，则

$$\phi^A(x)-\phi^B(x)=\lambda\int_0^x K(x,y)[\phi^A(y)-\phi^B(y)]dy$$

因为不存在特征值，故 $\phi^A(x)=\phi^B(x)$

例 3.5

解伏尔特拉方程

$$\phi(x)=\lambda\int_0^x e^{K(x-y)}\phi(y)dy+f(x)$$

这里

$$K_1(x,y)=e^{K(x-y)}$$

$$K_2(x,y)=\int_y^x e^{K(x-z)}e^{K(z-y)}dz=(x-y)e^{K(x-y)}$$

类似地有

$$K_n(x,y)=e^{K(x-y)}\ \frac{(x-y)^{n-1}}{(n-1)!}$$

因而预解核为

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{n-1}K_n(x,y)\ =-e^{K(x-y)}e^{\lambda(x-y)}$$

且

$$\phi(x)=f(x)+\lambda\int_0^x e^{(k+\lambda)(x-y)}f(y)dy$$

例 3.6

求积分方程

$$\phi(x)=f(x)+\int_0^x(x-t)\phi(t)dt$$

的预解核。

这个预解核可间接地得到（假定$\lambda=1$）。关于x微分，得

$$\phi'(x)=f'(x)+\int_0^x\phi(t)dt$$

$$\phi''(x)=f''(x)+\phi(x)$$

其中

$$\phi(0)=f(0),\ \ \phi'(0)=f'(0)$$

可以验证在初始条件下微分方程的解为

$$\phi(x)=f(x)-\int_0^x\sinh(x-y)\phi(y)dy$$

由此推知预解核为 $\sinh(x-y)$ 。

值得提出的，类似地讨论可以应用于多维伏尔特拉方程，例如非齐次的第二类积分方程

$$\phi(x_1,\cdots,x_n)=f(x_1,\cdots,x_n)+\lambda\int_0^{x_1}\cdots\int_0^{x_n}K(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots y_n)\phi(y_1,\cdots,y_n)dy_1\cdots dy_n \tag{3.14}$$

它可以借助于迭代序列求解

$$\phi_0(x)=f(x)$$

$$\phi_m(x)=f(x)+\lambda\int_0^x K(x,y)\phi_{m-1}(y)dy \tag{3.15}$$

$$x=(x_1,\cdots,x_n),\quad y=(y_1,\cdots,y_n)$$

如同前面的讨论那样，当K为非奇性核时

$$\phi(x)=f(x)+\sum_{s=1}^{\infty}\lambda^s\int_0^x K_s(x,y)f(y)dy \tag{3.16}$$

给出方程的唯一解，且级数对任何 λ 收敛。

此外，有时也可以把求解多维伏尔特拉方程的问题化归为具有某些相应边界条件的微分方程问题。然而，实际并非总能行得通。

例 3.7

解积分方程

$$\phi(x,y)=f(x,y)+\int_0^x\int_0^y exp(x-\xi+y-\eta)\phi(\xi,\eta)d\xi d\eta$$

在这里

$$K_1(x,y;\xi,\eta)=exp(x-\xi+y-\eta)$$

$$K_2(x,y;\xi,\eta)=\int_\xi^x\int_\eta^y K(x,y;x',y')K(x',y';\xi,\eta)dx'dy'$$

$$= exp(x-\xi+y-\eta)\int_{\xi}^{x}dx'\int_{\eta}^{y}dy'$$

$$= exp(x-\xi+y-\eta)(x-\xi)(y-\eta)$$

类似地可得

$$K_n(x,y;\xi,\eta) = exp(x-\xi+y-\eta)\frac{(x-\xi)^{n-1}(y-\eta)^{n-1}}{[(n-1)!]^2}$$

因而

$$R(x,y;\xi,\eta) = -\sum_{n=1}^{\infty}K_n(x,y;\ \xi,\eta)$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-\xi)^n(y-\eta)^n}{(n!)^2}exp(x-\xi+y-\eta)$$

方程的解为

$$\phi(x,y) = f(x,y)-\int_0^x\int_0^y R(x,y;\xi,\eta)f(\xi,\eta)d\xi,d\eta,$$

用另一种方法，这个问题也可写成微分方程的形式。显然，$\phi(0,0)=f(0,0)$。关于x微分原方程，可见

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}+\int_0^y exp(y-\eta)\phi(x,\eta)d\eta$$

$$+\int_0^x\int_0^y exp(x-\xi+y-\eta)\phi(\xi,\ \eta)d\xi d\eta$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}+\int_0^y exp(y-\eta)\phi(x,\eta)d\eta+\phi(x,y)-f(x,y) \quad (a)$$

由此得到一个边界条件

$$\frac{\partial\phi(x,0)}{\partial x} = \frac{\partial f(x,0)}{\partial x}+\phi(x,0)-f(x,0) \quad (b)$$

类似地，另一个边界条件为

$$\frac{\partial\phi(0,y)}{\partial y} = \frac{\partial f(0,y)}{\partial y}+\phi(0,y)-f(0,y) \quad (c)$$

积分——微分方程（a）可以关于y再微分一次，得

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\phi+\int_0^y exp(y-\eta)\phi(x,\eta)d\eta$$

$$+\frac{\partial\phi}{\partial y}-\frac{\partial f}{dy}$$

由此得到ϕ满足微分方程

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}-\frac{\partial\phi}{\partial x}-\frac{\partial\phi}{\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}-\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}+f \quad (d)$$

因此原问题的解等价于具有边界条件（b），（c）的微分方程（d）的解。

3.3 卷积型核

若伏尔特拉积分方程的核形为$K(x-y)$，则称这个方程为卷积型方程。它可以借助拉普拉斯变换来求解。求解方法依赖于拉普拉斯变换理论中的熟知结果（有关拉普拉斯变换理论的详细结果参见参考文献4），即

$$\int_0^\infty e^{-px}\int_0^x a(x-y)b(y)dydx$$

$$=\int_0^\infty e^{-px}a(x)dx\int_0^\infty e^{-px}b(x)dx$$

量

$$\int_0^x a(x-y)b(y)dy=\int_0^x a(y)b(x-y)dy$$

称为两个函数$a(x)$与$b(x)$的卷积或折积。为了方便，记$a(x)$的拉普拉斯变换为$\overline{a}$，等等。

现在考虑第一类积分方程

$$f(x)=\int_0^x K(x-y)\phi(y)dy \tag{3.17}$$

取拉普拉斯变换，得

$$\overline{f}=\overline{K}\,\overline{\phi} \tag{3.18}$$

因此

$$\overline{\phi}=\overline{f}/\overline{K} \qquad (3.\ \ )$$

只要这些变换存在。问题的解由$\overline{\phi}$的逆变换给出，即函数$\phi(x)$，而$\overline{\phi}$是它的拉普拉斯变换。求逆变换的理论是存在的，但有时逆变换可以直接看出。

例 3.8

解积分方程

$$\int_0^x \sin\alpha(x-y)\phi(y)dy=1-\cos\beta x$$

可以看出，方程是自相容的。取拉普拉斯变换，得

$$\frac{\alpha}{p^2+\alpha^2}\overline{\phi}=\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+\beta^2}$$

因此

$$\overline{\phi}=\frac{\beta^2(p^2+\alpha^2)}{\alpha p(p^2+\beta^2)}$$

$$=\frac{\alpha}{p}+\left(\frac{\beta^2-\alpha^2}{\alpha}\right)\frac{p}{p^2+\beta^2}$$

从而得

$$\phi(x)=\alpha+\alpha^{-1}(\beta^2-\alpha^2)\cos\beta x$$

这个积分方程也可以通过微分化成等价的微分方程求解。

例 3.9

解积分方程

$$\int_0^x \sin\alpha(x-y)\phi(y)dy=x$$

关于x微分这个方程，可得

$$a\int_0^x \cos a(x-y)\phi(y)dy=1$$

令$x=0$，可见方程是不相容的。尽管如此，仍然可以形式地取拉普拉斯变换，由此得到

$$\frac{d}{p^2+a^2}\overline{\phi}=\frac{1}{p^2},\quad \overline{\phi}=a^{-1}(1+a^2/p^2)$$

这时，$\overline{\phi}$的逆变换是

$$a^{-1}\delta(x)+ax$$

例 3.10

解积分方程

$$\int_0^x \phi(x-y)[\phi(y)-2\sin ay]dy=x\cos ax$$

取拉普拉斯变换，得

$$\overline{\phi}\{\overline{\phi}-2a/(p^2+a^2)\}=(p^2-a^2)/(p^2+a^2)^2$$

因此

$$\overline{\phi}=(a\pm p)/(p^2+a^2) \tag{3.20}$$

从而得到两个解

$$\phi(x)=\sin ax\pm\cos ax$$

值得指出的是，虽然这个方程是非线性的，但它仍可用本段讲述的方法求解。

例 3.11

解阿贝耳（Abel）方程

$$\int_0^x (x-y)^{-a}\phi(y)dy=f(x)\quad 0<a<1$$

在这里，条件 $a<1$ 是为了使积分在它的上限处收敛，条件

$\alpha>0$的作用将在后面提及。利用下面的结果

$$\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt=\Gamma(z)$$

原积分方程变换成

$$\Gamma(1-\alpha)p^{\alpha-1}\overline{\phi}=\overline{f}$$

因而

$$\begin{aligned}\overline{\phi}&=\Gamma(1-\alpha)p^{1-\alpha}\overline{f}\\&=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}p(\Gamma(\alpha)p^{-\alpha})\overline{f}\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}\phi(x)&=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\frac{d}{dx}\int_0^x(x-y)^{\alpha-1}f(y)dy\\&=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_0^x(x-y)^{\alpha-1}f'(y)dy\end{aligned}$$

由此可见，条件$\alpha>0$，对于这些积分的收敛是必要的。

具有卷积型核的非齐次第二类伏尔特拉方程可以用同样的方法求解。方程

$$\phi(x)=f(x)+\int_0^x K(x-y)\phi(y)dy$$

变换成

$$\overline{\phi}=\overline{f}+\overline{K}\,\overline{\phi}$$

因而

$$\overline{\phi}=(1-\overline{K})^{-1}\overline{f}$$

从而 $\phi(x)$ 可以求出。

例 3.12

解积分方程

$$\phi(x)=x^3+\int_0^x e^{3(x-y)}\phi(y)dy$$

而得

$$\overline{\phi}=\frac{\Gamma(4)}{p^4}+\frac{1}{p-3}\overline{\phi}$$

因而

$$\begin{aligned}\overline{\phi}&=[1-(p-3)^{-1}]^{-1}\Gamma(4)d^{-4}\\&=\left(1+\frac{1}{p-4}\right)\Gamma(4)p^{-4}\end{aligned}$$

$$\phi(x)=x^4+\int_0^x e^{4(x-y)}y^4dy$$

某些特殊形式的积分——微分方程也可以借助于这个方程求解。下面以例说明之。

例 3.13

解积分——微分方程

$$\phi''(x)+\int_0^x e^{2(x-y)}\phi'(y)dy=1$$

其中 $\phi(0)=0$ 及 $\phi'(0)=0$

取拉普拉斯变换，得

$$p^2\overline{\phi}+p\overline{\phi}/(p-2)=p^{-1}$$

及

$$\overline{\phi}=p^{-2}(p-1)^{-2}=\frac{1}{(p-1)^2}-\frac{2}{p-1}$$

$$+\frac{1}{p^2}+\frac{2}{p}$$

$$\phi(x)=xe^x-2e^x+x+2$$

我们也可以求解包含卷积的联立方程组。考虑由下面 n 个方程定义的 n 个函数的方程组

$$\phi_i(x)=f_i(x)+\sum_{j=1}^{n}\int_0^x K_{ij}(x-y)\phi_j(y)dy \quad (3.21)$$

这个方程组的拉普拉斯变换是

$$\overline{\phi}_i=\overline{f}_i+\sum_{j=1}^{n}\overline{K}_{ij}\overline{\phi}_j$$

这是具有 n 个未知函数$\overline{\phi}_j$的 n 个方程

例 3.14

解积分方程组

$$\phi_1(x)=1+\int_0^x\phi_2(y)dy$$

$$\phi_2(x)=e^{2x}-\int_0^x e^{2(x-y)}\phi_1(y)dy$$

这些方程的拉普拉斯变换是

$$\overline{\phi_1}=p^{-1}(1+\overline{\phi}_2)$$

$$\overline{\phi}_2=(p-2)^{-1}(1-\overline{\phi}_1)$$

因而

$$\overline{\phi_1}=(p-1)^{-1},\ \overline{\phi}_2=(p-1)^{-1}$$

从而

$$\phi_1(x)=\phi_2(x)=e^x$$

借助拉普拉斯变换卷积性质，可以处理的另外一种类型的方程是齐次第二类伏尔特拉方程，形式如

$$x\phi(x)=\int_0^x K(x-y)\phi(y)dy \quad (3.22)$$

在这种情况，积分核为 $x^{-1}K(x-y)$，并且为奇异性的，还可以验证它既无特征值也无特征函数。由于

$$\int_0^\infty xe^{-px}\phi(x)dx=-\frac{d}{dp}\int_0^\infty e^{-px}\phi(x)dx$$

因而方程（3.22）可变换成

$$-\frac{d\overline{\phi}}{dp}=\overline{K}\,\overline{\phi}$$

这个方程需要积分。显然，由积分产生的任意常数为函数中的数量因子。如果积分

$$\int_0^x K(x-y)\phi(y)dy$$

存在，则方程的解存在。

例 3.15

解积分方程

$$x\phi(x)=\lambda\int_0^x(1+ae^{-\alpha y})\phi(x-y)dy \tag{3.23}$$

并指出，若使方程可解，a，α 与 λ 的取值范围。

原方程的拉普拉斯变换是

$$-\frac{d\overline{\phi}}{dp}=\lambda[p^{-1}+a(p+\alpha)^{-1}]\,\overline{\phi}$$

因而

$$\overline{\phi}=C\Gamma(\lambda)\Gamma(\lambda a)p^{-\lambda}(p+\alpha)^{-\lambda a}$$

其中 C 为任意常数，引入 Γ 函数的理由将在后面指明。设

$$u(x)=x^{\lambda-1},\qquad \overline{u}=\Gamma(\lambda)p^{-\lambda}$$

$$v(x)=e^{-\alpha x}x^{\lambda a-1},\quad \overline{v}=\Gamma(\lambda a)(p+\alpha)^{-\lambda a}$$

因此 $\overline{\phi}=\overline{u}\,\overline{v}$，准确到任意常数，积分方程的解为

$$\phi(x)=\int_0^x u(y)v(x-y)dy$$

可以看出，为使 $u(x)$，$v(x)$ 与 $\phi(x)$ 有意义，必须 $Re\lambda>0$，

$\mathrm{Re}\lambda a>0$ 。因此具有正实部的任意λ值是可能的特征值，与之相应的特征函数为 $\phi(x)$。

借助拉普拉斯变换可以求解的另一类积分方程是

$$\phi(x)=f(x)+\lambda\int_x^{\infty}K(y-x)\phi(y)dy \qquad x>0$$

它的求解借助于下面的结果

$$\int_0^{\infty}e^{-px}dx\int_x^{\infty}K(y-x)\phi(y)dy=\int_0^{\infty}K(u)e^{pu}du\int_0^{\infty}e^{-py}\phi(y)dy$$

令 $x=y+u$，上式等于 $\overline{K}(-p)\overline{\phi}(p)$ 。只要 $\overline{K}(-p)$ 与 $\overline{\phi}(p)$ 的定义域为整个 p 平面，这个过程就有效。因此，有

$$\overline{\phi}(p)=\overline{f}(p)+\lambda\overline{K}(-p)\overline{\phi}(p)$$

及

$$\overline{\phi}(p)=\overline{f}(p)/[1-\lambda\overline{K}(-p)]$$

对应于 $\overline{\phi}$ 的函数 $\phi(x)$ 称为问题的"主解"，这是因为解可能不是唯一解。事实上当积分方程

$$\phi(x)=\lambda\int_x^{\infty}K(y-x)\phi(y)dy \tag{3.24}$$

存在非平凡解时，原积分方程的解是不唯一的。其原因如下，设

$$\xi=x^{-1},\ \eta=y^{-1},\ K(y-x)=k(\xi,\eta),\ \phi(x)=\Phi(\xi)$$

则积分方程 (3.24) 变为

$$\Phi(\xi)=\lambda\int_0^{\xi}k(\xi,\eta)\eta^{-2}\Phi(\eta)d\eta$$

积分核为奇异性的，所以特征函数不存在的条件不满足。

例 3.16

解积分方程

$$\phi(x)=x+\lambda\int_x^{\infty}e^{a(x-y)}\phi(y)dy \qquad x>0$$

显然，解不是唯一的，因为积分方程

$$\phi(x)=\lambda\int_x^{\infty}e^{a(x-y)}\phi(y)dy$$

的解是$e^{(a-\lambda)x}$，只要$Re\lambda>0$。这个解可以称为余函数。问题的主解可以按下法得到

$$K(x)=e^{-ax},\quad \overline{K}(p)=\frac{1}{p+a}$$

若 $Re(p+a)>0$，上式有意义。若

$$Re(a-p)>0,\ 即\ Rep<Rea \tag{a}$$

则$\overline{K}(-p)=(a-p)^{-1}$ 有意义。从而主解的拉普拉斯变换为

$$\overline{\phi}=p^{-2}+\lambda(a-p)^{-1}\overline{\phi}$$

因而

$$\begin{aligned}\overline{\phi}&=p^{-2}(p-a+\lambda)^{-1}(p-a)\\&=(a-\lambda)^{-2}[\lambda p^{-1}+a(a-\lambda)p^{-2}-\lambda(p-a+\lambda)^{-1}]\end{aligned}$$

于是主解为

$$(a-\lambda)^{-2}[\lambda+a(a-\lambda)x-\lambda e^{(a-\lambda)x}]$$

若

$$Rep>0 \tag{b}$$

及

$$Re(p-a+\lambda)>0,\ 即\ Rep>Re(a-\lambda) \tag{c}$$

则$\overline{\phi}$存在。若 $Rea>0$，条件 (a) 与 (b) 可同时成立，这时存在一个共同区域。$0<Rep<Rea$。条件(a) 与 (c) 可以同时成立，假若

$$Rea>Rep>Re(a-\lambda)$$

如果 $Re\lambda>0$，上面不等式成立。

因而，若 $Re\lambda>0$，则$\overline{K}-(p)$与$\overline{\phi}(p)$的存在区域有一共同部分

$$Re\alpha > Rep > max\{Re(\alpha-\lambda),\ 0\}$$

事实上，条件 $Re\alpha>0$，$Re\lambda>0$ 是积分

$$\int_x^\infty e^{-\alpha y} y dy,\quad \int_x^\infty e^{-\lambda y} y dy \text{ 与 } \int_x^\infty e^{-\alpha y} e^{(\alpha-\lambda)y} dy$$

收敛的必要条件。因此积分方程的解可以写为

$$(\alpha-\lambda)^{-2}[\lambda+\alpha(\alpha-\lambda)x]+Ce^{(\alpha-\lambda)x}$$

其中 C 为任意量。值得指出的是，当$\alpha=\lambda$时，上面的解无意义。这时方程

$$\phi(x)=\lambda\int_x^\infty e^{\lambda(x-y)}\phi(y)dy$$

的解为 $\phi(x)=1$，只须 $Re\lambda>0$。欲求解的积分方程变为

$$\phi(x)=x+\lambda\int_x^\infty e^{\lambda(x-y)}\phi(y)dy$$

这时，若

$$Rep<Re\lambda$$

则

$$\overline{K}(-p)=(\lambda-p)^{-1}$$

有意义。

主解的拉普拉斯变换为

$$\overline{\phi}=p^{-2}+\lambda(\lambda-p)^{-1}\overline{\phi}$$

因而
$$\overline{\phi}=\frac{p-\lambda}{p^3}$$

由此得

$$\phi(x)=x-\frac{\lambda x^2}{2}$$

$\overline{\phi}$对 $Rep>0$ 有意义。

因此问题是可解的，因为 p 可以取在区域 $Re\lambda>Rep>0$ 之内，只要$Re\lambda>0$这是可以办到的。这样通解即为

$$\phi(x)=x-\frac{\lambda x^2}{2}+C$$

其中 C 为任意常数。

例 3.17

求积分方程

$$\phi(x)=\lambda\int_x^\infty \cos a(x-y)\phi(y)dy$$

的特征函数。

虽然可以将这个方程化归为微分方程来求解，但还可以有一个更直观的途径。设 $e^{\nu x}$ 为试验解，其中 ν 待定。则

$$\int_x^\infty \cos a(x-y)\phi(y)dy=\int_x^\infty \cos a(x-y)e^{\nu y}dy$$

$$=-\frac{\nu}{\nu^2+a^2}e^{\nu x}$$

因此，只要

$$\lambda=-\nu/(\nu^2+a^2)$$

积分方程就被满足。若 λ 是给定的，上式给出 ν 的两个可能值；或者当 ν 是给定时，上式给出了 λ 的一个值。可是积分必须收敛。

由于

$$\cos a(x-y)e^{\nu y}=\frac{1}{2}[e^{(\nu-ia)y}e^{iax}+e^{(\nu+ia)y}e^{-iax}]$$

收敛条件显然由下式给出

$$Re(\nu - ia) < 0, \quad Re(\nu + ia) < 0$$

若 a 是实的，条件就简化成 $Re\nu < 0$ 。

3.4 伏尔特拉积分方程的某些混合类型

（ a ）与阿贝耳方程有关的方程

在这一段，我们考虑某些特殊的方程，它们可以借助于特殊的技巧求解。我们已经知道，阿贝耳方程可借助拉普拉斯变换求解。事实上它也可按下面的方法直接求解。

若

$$f(x) = \int_0^x (x-y)^{-a} \phi(y) dy \qquad 0 < a < 1$$

$$\int_0^u \frac{f(x)dx}{(u-x)^{1-a}} = \int_0^u \frac{dx}{(u-a)^{1-a}} \int_0^x \frac{\phi(y)dy}{(x-y)^a}$$

$$= \int_0^u \phi(y) dy \int_y^u \frac{dx}{(u-x)^{1-a}(x-y)^a} \tag{3.25}$$

可以证明，方程 (3.25) 右边的内层积分等于$\pi \operatorname{cosec} \pi a$。这样

$$\int_0^u \phi(y) dy = \frac{\sin a\pi}{\pi} \int_0^u \frac{f(x)dx}{(u-x)^{1-a}}$$

从而

$$\phi(u) = \frac{\sin a\pi}{\pi} \frac{d}{du} \int_0^u \frac{f(x)dx}{(u-x)^{1-a}} \tag{3.26}$$

可以用同样方法求解一个比较复杂的方程

$$f(x) = \int_c^x \frac{\phi(y)dy}{\{p(x) - p(y)\}^a} \quad 0 < a < 1, \ c < x \tag{3.27}$$

其中 $p(x)$ 是严格单调增加的可微函数，且 $p'(x)$ 在某一区

间 $x_0 \leqslant c < x < a$ 上不为零。考虑

$$\int_c^s \frac{p'(x)f(x)dx}{\{p(s)-p(x)\}^{1-a}}$$

$$=\int_c^s\int_c^x \frac{p'(x)\phi(y)dxdy}{\{p(s)-p(x)\}^{1-a}\{p(x)-p(y)\}^a}$$

$$=\int_c^s \phi(y)dy\left[\int_y^s \frac{p'(x)dx}{\{p(s)-p(x)\}^{1-a}\{p(x)-p(y)\}^a}\right]$$

$$=\pi\operatorname{cosec}\pi a\int_c^s \phi(y)dy$$

从而

$$\phi(s)=\frac{\sin a\pi}{\pi}\ \frac{d}{ds}\int_c^s \frac{p'(x)f(x)dx}{\{p(s)-p(x)\}^{1-a}} \qquad (3.28)$$

这是积分方程（3.27）的解。可以指出，当积分下限C换成$-\infty$时，上面的方法仍可应用。另外，为了使方程相容，应有 $f(c)=0$ 。

例 3.18

解积分方程

$$x=\int_0^x \frac{\phi(y)dy}{(x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}}$$

因满足相容性条件。

$$p(x)=x^2,\ p'(x)=2x\neq 0,\ 若\ x>0$$

于是

$$\phi(y)=\pi^{-1}\sin\frac{\pi}{2}\frac{d}{dy}\int_0^y \frac{2x^2dx}{(y^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=(2/\pi)\frac{d}{dy}\int_0^{\pi/2} y^2\cos^2\theta d\theta$$

作变换

$$x=y\cos\theta$$

得

$$\phi(y)=y$$

例 3.19

解积分方程

$$g(x)=x\int_0^x \frac{\phi(y)dy}{(x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}} \qquad 0\leqslant x$$

其中

$$g(x)=g_1(x) \qquad 0\leqslant x<a$$
$$=g_2(x) \qquad a\leqslant x$$

且

$$\lim_{x\to a} g_1(x)\neq \lim_{x\to a} g_2(x)$$

因为 $g(x)$ 是通过积分定义的，若 ϕ 是有界的，则它必连续。由于它的不连续性，所以 ϕ 将包含一个广义函数以及一个通常函数。方程的形式解由下式给出

$$\phi(y)=\pi^{-1}\frac{d}{dy}\int_0^y \frac{2g(x)}{(y^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}dx$$

$$=(2/\pi)\frac{d}{dy}\int_0^{\pi/2} g(y\sin\theta)d\theta$$

$$=(2/\pi)\int_0^{\pi/2} g'(y\sin\theta)\sin\theta d\theta$$

由于$g(x)$可以写为

$$g(x)=g_1(x)\{1-H(x-a)\}+g_2(x)H(x-a)$$

其中

$$H(x)=1 \qquad x\geqslant 0$$
$$=0 \qquad x<0$$

这样

$$g'(x)=g_1'(x)[1-H(x-a)]+g_2'(x)H(x-a)$$
$$+\delta(x-a)\{g_2(x)-g_1(x)\}$$

令

$$y\sin\alpha=a,\quad \alpha=\operatorname{cosec}^{-1}(y/a)$$

则

$$\phi(y)=(2/\pi)\int_0^{\pi/2}g_1'(y\sin\theta)[1-H(y\sin\theta-\sin\alpha)]$$
$$+g_2'(y\sin\theta)H(y\sin\theta-\sin\alpha)$$
$$+\delta(y\sin\theta-\sin\alpha)[g_2(y\sin\theta)$$
$$-g_1(y\sin\theta)]\sin\theta d\theta$$
$$=(2/\pi)\int_0^{\alpha}g_1'(y\sin\theta)\sin\theta d\theta$$
$$+(2/\pi)\int_{\alpha}^{\pi/2}g_2'(y\sin\theta)\sin\theta d\theta$$
$$+(2/\pi)[g_2(y\sin\alpha)-g_1(y\sin\alpha)](\tan\alpha)/y$$

其中用到了下面的结果

$$\int\delta\{f(\theta)-f(\alpha)\}d\theta=\{f'(\alpha)\}^{-1}$$

从而得

$$\phi(y)=(2/\pi)\left[\int_0^{\alpha}g_1'(y\sin\theta)\sin\theta d\theta\right.$$
$$+\int_{\alpha}^{\pi/2}g_2'(y\sin\theta)\sin\theta d\theta$$
$$\left.+\{g_2(a)-g_1(a)\}a/\{y\sqrt{y^2-a^2}\}\right]$$

若 g 含有更多的间断性，可按类似的方法处理。

例 3.20

解方程

$$\iint_D \frac{\phi(x,y)dxdy}{\{(y_0-y)^2-(x_0-x)^2\}^{\frac{1}{2}}}=f(x_0,y_0)$$

其中D是由直线 $y=0$，$x-x_0\pm(y-y_0)=0$围成的直角三角形区域。

虽然这个积分方程包含了两个变量，但是，只要作适当的变量代换，它可以借助于本段的方法求解。下面的关系式给出这个提示

$$(y_0-y)^2-(x_0-x)^2=(y_0+x_0-y-x)(y_0-x_0-\overline{y-x})$$

令

$$\xi=x+y,\quad \eta=y-x,\quad \xi_0=x_0+y_0,\quad \eta_0=y_0-x_0$$

则

$$\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}=\frac{1}{2},\quad \frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}=2$$

$y=0$ 变为 $\xi+\eta=0$

$x-x_0+y-y_0=0$ 变为 $\eta=\eta_0$

$x-x_0-y+y_0=0$ 变为 $\xi=\xi_0$

这样

$$F(\xi_0,\eta_0)=\iint_D \frac{\phi(x,y)dxdy}{\{(y_0-y)^2-(x_0-x)^2\}^{\frac{1}{2}}}$$

$$=2\iint_\Delta \frac{\Phi(\xi,\eta)d\xi d\eta}{[(\xi_0-\xi)(\eta_0-\eta)]^{\frac{1}{2}}}$$

其中 Δ为由三条直线

$$\xi+\eta=0,\quad \xi=\xi_0,\quad \eta=\eta_0$$

所围成的直角三角形区域。且

$$\Phi(\xi,\eta)=\phi(x,y)$$

及

$$F(\xi_0,\eta_0)=f(x_0,y_0)$$

令Δ_0为在ξ_0,η_0，平面由三条直线

$$\xi_0+\eta_0=0,\ \xi_0=\alpha,\ \eta_0=\beta$$

所围成的直角三角形区域，则

$$\frac{1}{4}\iint_{\Delta_0}\frac{d\xi_0 d\eta_0}{[(\alpha-\xi_0)(\beta-\eta_0)]^{\frac{1}{2}}}\iint_{\Delta}\frac{\Phi(\xi,\eta)d\xi d\eta}{[(\xi_0-\xi)(\eta_0-\eta)]^{\frac{1}{2}}}$$

$$=2\iint_{\Delta_0}\frac{F(\xi_0,\eta_0)d\xi_0 d\eta_0}{[(\alpha-\xi_0)(\beta-\eta_0)]^{\frac{1}{2}}}$$

可以验证，四重积分可写为

$$\frac{1}{4}\int_0^\alpha\int_0^\beta\Phi(\xi,\ \eta)d\xi d\eta\int_\xi^\alpha\frac{d\xi_0}{[(\alpha-\xi_0)(\xi_0-\xi)]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\int_\eta^\beta\frac{d\eta_0}{[(\beta-\eta_0)(\eta_0-\eta)]^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{\pi^2}{4}\int_0^\alpha d\xi\int_0^\beta\Phi(\xi,\eta)d\eta$$

由此推得

$$\Phi(\alpha,\beta)=(8/\pi^2)\ \frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}\iint_{\Delta_0}\frac{F(\xi_0,\eta_0)d\xi_0 d\eta_0}{[(\alpha-\xi_0)(\beta-\eta_0)]^{\frac{1}{2}}}$$

令 $\alpha=u+v,\ \beta=v-u$

则

$$\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial v^2}-\frac{\partial^2}{\partial u^2}\right)$$

可见 $$\phi(u,\ v)=\pi^{-2}\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}\right]$$

其中 $$\psi(u,v)=\iint_{D_0}\frac{f(x_0,y_0)dx_0 dy_0}{[(v-y_0)^2-(u-x_0)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

而D_0是在x_0，y_0 平面内由三条直线 $y_0=0$，$y_0-v\pm(x_0-u)=0$ 所围成的区域。由 α，β 到 u,v 的变换正好是从 $(x,$

y）到（ξ,η）的变换的逆。

例 3.21

解积分方程

$$\int_0^x (x-y)^{\alpha-1}\phi(y)dy = x^\beta \qquad \alpha>1,\ \beta\geqslant 0$$

这个方程确实可借助拉普拉斯变换求解，但是，凭直觉的观察也可得到解。若 α 是整数

$$\int_0^x (x-y)^{\alpha-1}\phi(y)dy$$

若不考虑常数因子，它是函数 ϕ 的 α 次积分（附录A），并且不考虑常数因子，x^p 的 α 次积分是 $x^{\alpha+p}$ 。所以若 α 是整数，这个积分方程的解不考虑常数因子则为 $x^{\beta-\alpha}$，这里

$$\alpha+p=\beta$$

这就提示我们去寻求形如 $Kx^{\beta-\alpha}$的解。若解存在，它将是唯一的。这时

$$K\int_0^x (x-y)^{\alpha-1}y^{\beta-\alpha}dy = x^\beta$$

令

$$y = x\tau$$

则有

$$Kx^\beta\int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1}\tau^{\beta-\alpha}d\tau = x^\beta$$

因而

$$K=[B(\alpha-1,\beta-\alpha+1)]^{-1}$$

其中 B 是贝塔（Beta）函数。

（b）非线性伏尔特拉方程

在 3.2 节中，讨论了关于未知函数 ϕ 是线性的伏尔特拉

型方程迭代解法的可能性。借助于微分方程理论中熟知的皮卡（Picard）方法，这些思想可以应用于求解第二类非线性伏尔特拉积分方程。考虑微分方程

$$\frac{d\phi}{dx}=g(x,\phi) \tag{3.29}$$

满足在 $x=a$ 处 $\phi=b$ 的解。这个微分方程满足相应的边界条件的求解等价于积分方程

$$\phi(x)=b+\int_a^x g\{x',\phi(x')\}dx' \tag{3.30}$$

的求解。它的解可以通过如下定义的函数序列 $\phi_n(x)$ 而得到。

$$\phi_0(x)=b$$

$$\phi_n(x)=b+\int_a^x g\{x',\phi(x')\}dx' \tag{3.31}$$

现在考虑第二类伏尔特拉方程

$$\phi(x)=f(x)+\lambda\int_a^x F\{x,y,\phi(y)\}dy \tag{3.32}$$

方程（3.30）是方程（3.32）的特殊情形。构造一个函数序列$\phi_n(x)$：

$$\phi_0(x)=f(x)$$

$$\phi_n(x)=f(x)+\lambda\int_a^x F\{x,y,\phi_{n-1}(y)\}dy \tag{3.33}$$

可以看出，由于F关于ϕ是非线性的，这个过程可应用到$f(x)$为零的情形，而生成的函数序列确实可能不趋向于零。在这种情形，这个序列所趋向的极限函数是对应于特征值λ的特征函数。由于问题的非线性性，当然可能有多个特征函数，但是由于这个序列过程的特性，却只能有一个出现。

现在我们考虑$f(x)$为非零的一般情形，并且系数λ被吸

收到F中。有两个问题需要考虑，第一，这个序列是收敛的吗？第二，如果这个序列收敛，它收敛到积分方程的解吗？我们将证明这两个问题的回答在某一区域

$$|x-a|\leqslant\alpha,\quad |y-a|\leqslant\alpha,\quad |\phi-f(a)|\leqslant\beta$$

上是肯定的。其中α,β为正常数，只需

$$|F|<M \tag{3.34}$$

以及

$$|F(x,y,\phi_A)-F(x,y,\phi_B)|<K|\phi_A-\phi_B| \tag{3.35}$$

其中M与K为正常数，x,y,ϕ_A与ϕ_B恰好落在指定的区域内。由于

$$\phi_1(x)=f(x)+\int_a^x F\{x,y,f(y)\}dy$$

故有

$$|\phi_1(x)-\phi_0(x)|=\left|\int_a^x F\{x,y,f(y)\}dy\right|\leqslant|x-a|M\leqslant M\alpha \tag{3.36}$$

又有

$$\begin{aligned}|\phi_2(x)-\phi_1(x)|&=\left|\int_a^x[F\{x,y,\phi_1(y)\}-F\{x,y,\phi_0(y)\}]dy\right|\\&\leqslant\int_a^x|F\{x,y,\phi_1(y)\}-F\{x,y,\phi_0(y)\}|dy\\&\leqslant\int_a^x K|\phi_1(y)-\phi_0(y)|dy\\&\leqslant\int_a^x KM|y-a|dy=KM\frac{(x-a)^2}{2}\\&\leqslant KM\frac{\alpha^2}{2}\end{aligned}$$

类似地

$$|\phi_n(x)-\phi_{n-1}(x)|\leqslant\frac{1}{n!}MK^{n-1}\alpha^n \tag{3.37}$$

这样无穷级数的和

$$|\phi_0(x)|+\sum_{n=1}^{\infty}|\phi_n(x)-\phi_{n-1}(x)|$$

$$\leqslant M+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}MK^{n-1}\alpha^n=K^{-1}Me^{K\alpha}$$

所以这个级数是绝对收敛的。因此得到序列

$$\phi_m(x)=\phi_0(x)+\sum_{n=1}^{m}\{\phi_n(x)-\phi_{n-1}(x)\} \qquad (3.38)$$

是绝对收敛的，因为它的每一项 $\phi_n(x)-\phi_{n-1}(x)$ 被一个绝对收敛的序列 $|\phi_n(x)-\phi_{n-1}(x)|$ 的相应项所控制。所以第一个问题得到了肯定的回答。

余下的问题是证明序列 $\phi_n(x)$ 确实收敛到积分方程的解。令

$$\phi^*(x)=\lim_{m\to\infty}\phi_m(x)=\phi_0(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\{\phi_n(x)-\phi_{n-1}(x)\}$$

函数 $\phi_n(x)$ 是连续的，而 $\phi^*(x)$ 是由连续函数 $\phi_n(x)-\phi_{n-1}(x)$ 构成的绝对收敛级数所定义的，从前面给出的收敛性的证明可以看出，这个级数也是一致收敛的。所以 $\phi^*(x)$ 是连续的，且当 m 增大时，$\phi^*(x)-\phi_m(x)$ 一致地趋向于零。进而

$$|F\{x,y,\phi^*(y)\}-F\{x,y,\phi_m(y)\}|<K|\phi^*-\phi_m|$$

故

$$\left|\int_a^x[F\{x,y,\phi^*(y)\}-F\{x,y,\phi_m(y)\}]dy\right|$$

将一致地趋向于零。这样方程

$$\phi_m(x)=f(x)+\int_a^x F\{x,y,\phi_{m-1}(y)\}dy \qquad (3.39)$$

的极限是

$$\phi^*(x)=f(x)+\int_a^x F\{x,y,\phi^*(y)\}dy$$

因之，$\phi^*(x)$ 即为所要求的积分方程的解。

对于 $f(x)$ 为零的情形，特征函数的第一次近似为

$$\phi_1(x)=\lambda\int_a^x F(x,y,o)dy$$

余下的过程同前。

例 3.22

求解积分方程

$$\phi(x)=\int_0^x\frac{1+\phi(y)}{1+y}dy$$

下面将指出，若 $x\leqslant -1$ 这个方程是无意义的。按下面的方式生成函数序列

$$\phi_0(x)=0$$

$$\phi_1(x)=\int_0^x\frac{dy}{1+y}=\log(1+x)$$

$$\phi_2(x)=\int_0^x\frac{1+\log(1+y)}{1+y}dy$$

$$=\log(1+x)+\frac{[\log(1+x)]^2}{2}$$

这个序列的一般项为

$$\phi_m(x)=\sum_{s=1}^{m}\frac{[\log(1+x)]^s}{s!}$$

且

$$\phi^*(x)=\lim_{m\to\infty}\phi_m(x)=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{[\log(1+x)]^s}{s!}$$

$$=exp\{\log(1+x)\}-1=x$$

可以验证，这确是原给积分方程的解。值得指出的是，收敛

条件是满足的，因为在

$$|x|\leqslant a,\ |y|\leqslant a,\ |\phi|\leqslant\beta$$

时有

$$\left|\frac{1+\phi}{1+y}\right|\leqslant\frac{1+\beta}{1-a}\qquad a\leqslant1-\delta<1$$

以及

$$\left|\frac{1+\phi_A}{1+y}-\frac{1+\phi_B}{1+y}\right|\leqslant\frac{1}{1-a}|\phi_A-\phi_B|$$

故当 $|x|\leqslant1-\delta<1$，收敛条件是满足的。

可以很容易地证明，积分方程

$$\phi(x)=\lambda\int_0^x\frac{1+\phi(y)}{1+y}dy\qquad Re\lambda>0$$

的解是

$$\phi(x)=(1+x)^{\lambda}-1$$

练　　习

1. 分别就 $\lambda\neq\beta-a$ 与 $\lambda=\beta-a$ 两种情形求积分方程

$$\phi(x)=e^{-ax}+\lambda\int_0^x e^{-\beta(x-y)}\phi(y)dy\qquad 0\leqslant x$$

的解 $\phi(x)$。　(Wales)

2. 求解积分方程

$$\phi(x)=2\cos ax+\int_0^x(x-t)\phi(t)dt\quad x\geqslant0\quad \text{(Wales)}$$

3. 证明积分方程

$$\phi(x)=\lambda\int_0^x[A(x)/A(y)]\phi(y)dy+f(x)\quad x\geqslant0$$

的解为

$$\phi(x)=f(x)+\lambda\int_0^x[A(x)/A(y)]e^{\lambda(x-y)}f(y)dy$$

假定对正的 x，$A(x)$ 非零。

4. 求解积分方程

$$\int_0^x \exp k(x-y)\phi(y)dy = \sin 3x \qquad x \geqslant 0$$

5. 分别就 $a \neq 1$ 与 $a=1$ 的情形求解积分方程

$$\int_0^x \cosh 3(x-y)\phi(y)dy = 1 - a\cos ax \qquad x \geqslant 0$$

6. 证明积分方程

$$\int_0^x \phi(x-y)[\phi(y)-2]dy = x(e^{-ax}-1) \qquad x \geqslant 0$$

的解是 $1 \pm e^{-ax}$

7. 求解积分方程

$$\int_0^x (x-y)^{\frac{1}{2}}\phi(y)dy = x \qquad x \geqslant 0$$

8. 求解积分方程

$$\int_0^x \cos a(x-y)\phi(y)dy = \sin ax \qquad x \geqslant 0$$

9. 求解在 1.2(b) 节中讨论过的积分方程

$$A = AK(t) + \int_0^t K(t-\tau)\phi(\tau)d\tau \quad t > 0$$

当未售出的货物的比例 $K(t)$ 为

$$(a)\ \exp(-at) \quad (b)\ \begin{cases} 1-at & t \leqslant a^{-1} \\ 0 & t > a^{-1} \end{cases}$$

并解释为什么在这个问题中相容性条件是满足的。

10. 设 $p(x)$ 是一个正的单调增加可微函数，并且在某一区间 $a<x<b$ 上有非零导数。证明积分方程

$$f(x) = \int_x^b \frac{\phi(y)dy}{\{p(y)-p(x)\}^{\alpha}} \qquad a \leqslant x \leqslant b,\ 0<\alpha<1$$

的解是

$$\phi(y) = -\pi^{-1}\sin a\pi\int_y^b \frac{p'(z)f(z)}{\{p(z)p(y)\}^{1-a}}$$

11．证明，若

$$f(x) = x\int_x^\infty \frac{g(y)dy}{(y^2-x^2)^{\frac{1}{2}}} \qquad x\geqslant 0$$

则

$$g(y) = -(2/\pi)\int_0^\infty \cosh f'(y\cosh z)dz$$

12．证明积分方程

$$\phi(x) = \lambda\int_x^\infty \frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!}\phi(t)dt$$

的特征函数为 $exp\{-\lambda^{\frac{1}{n}}x\}$，并说明特征值的范围。

13．证明方程

$$\phi(x) = \lambda\int_0^x (t^{-1}-x^{-1})\phi(t)dt \qquad x\geqslant 0$$

的一个可能的解是 $\phi(x)=x^a$，并求相应的 λ 值以及 a 与 λ 的可能取值的范围。

14．求解积分方程

$$x\int_x^\infty \frac{\phi(y)dy}{(y^2-x^2)^{\frac{1}{2}}} = \begin{cases} x^{-1} & 0\leqslant x\leqslant a \\ 2x^{-1} & a\leqslant x \end{cases}$$

15．利用迭代方法解积分方程

$$\phi(x) = \int_0^x \frac{1+[\phi(y)]^2}{1+y^2}dy \qquad x\geqslant 0$$

16．解下列积分方程组

$$\phi_1(x) = 1-\int_0^x \phi_1(y)dy + 4\int_0^x e^{x-y}\phi_2(y)dy$$

$$\phi_2(x) = e^x - \int_0^x e^{y-x}\phi_1(y)dy + \int_0^x \phi_2(y)dy \qquad x \geqslant 0$$

17．求解积分方程

$$\phi(x) = \sin x + \cos x + 2\int_x^\infty \cos(x-y)\phi(y)dy$$

并验证求得的解的确满足方程。

18．求积分方程

$$\phi(x) = \lambda \int_x^\infty \sin\alpha(x-y)\phi(y)dy$$

的特征函数，并给出为使问题可解，λ 与 α 应满足的条件。

4. 积分方程与变换

4.1 初步知识

假设T为某一线性算子，当它作用于定义在区域D上的函数F上时，得到定义在区域Δ上的函数f。即

$$f = TF \tag{4.1}$$

假设S是另一个线性算子，当它作用于定义在区域Δ上的函数f上时，将它变换成定义在区域D上的函数F。即

$$F = Sf \tag{4.2}$$

方程（4.1）与方程（4.2）皆称为变换。将它们结合起来给出

$$f = TSf \quad 与 \quad F = STF \tag{4.3}$$

因此，可以称T为S的逆变换，反之亦然。

应用于积分方程如下所述：当T为某一积分过程(一个积分变换）则积分方程（4.1）的解F由方程（4.2）给出，即借助于逆变换给出其解。这样的逆变换不一定给出唯一的结果，因为可能存在一个D上的函数G使 $TG = 0$。

在这一章中，将给出一系列利用不同变换的过程的实例。我们总是假设所考虑的函数满足使算子有意义的适当的条件。在一般情况下，我们将不给出详细的证明。有关积分变换的公式以及它们的逆变换的表达式可参见参考文献4。

例 4.1

设F为定义于某一区域上的量。设T是一变换，它将所有的F变换成定义在同一区域上的量的集合TF。设T使

$$T^2F = T(TF) = F$$

对所有 F 成立。求解方程

(a) $\phi = \lambda T\phi$ λ 为一数

(b) $\phi = \lambda T\phi + f$

其中 ϕ 也定义在同一区域上。

令

$$\phi = u + \mu Tu$$

其中 μ 是一个待定的数，而 u 是定义在同一区域上的某一量。

在 (c) 情况下

$$u + \mu Tu = \lambda T(u + \mu Tu) = \lambda\mu u + \lambda Tu$$

其解为

$$\mu = \lambda, \quad \lambda\mu = 1, \quad u \text{ 任意。}$$

所以

$$\lambda = \pm 1, \qquad \phi = u \pm Tu$$

给出了一个形式解，只需算子 Tu，$T(Tu) = T^2u$ 是合法的。

在 (b) 情况下

$$T\phi = \lambda T^2\phi + \lambda TF = \lambda\phi + \lambda TF$$

因而

$$\phi(1 - \lambda^2) = f + \lambda Tf$$

只需 $\lambda^2 \neq 1$，算子就是合法的。

4.2 傅立叶积分方程

若 $f(x)$ 为连续函数，则

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}F(\omega)d\omega \tag{4.4a}$$

其中

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x'}(fx')dx' \qquad (4.4b)$$

方程(4.4b)给出了关于F的积分方程（4.4a）的解。反之亦然。若$f(x)$为实的，则可利用$\sin\omega x$的奇性质与$\cos\omega x$的偶性质，使下面的结果成立：若

$$f(x)=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\int_0^{\infty}\cos\omega x\phi(\omega)d\omega \qquad 0\leqslant x \qquad (4.5a)$$

则

$$\phi(\omega)=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\int_0^{\infty}\cos\omega xf(x)dx \qquad 0\leqslant\omega \qquad (4.5b)$$

$\phi(\omega)$与$f(x)$相互为余弦变换。

若

$$f(x)=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\int_0^{\infty}\sin\omega x\phi(\omega)d\omega \qquad 0\leqslant x \qquad (4.6a)$$

则

$$\phi(\omega)=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\int_0^{\infty}\sin\omega xf(x)dx \qquad 0\leqslant\omega \qquad (4.6b)$$

$\phi(\omega)$与$f(x)$相互为正弦变换。可以看出，这两个变换都满足例4.1的条件。

例 4.2

解积分方程

$$\frac{a}{a^2+x^2}=\int_0^{\infty}\cos\omega x\phi(\omega)d\omega \qquad (a>0)$$

$$(\phi\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{a\cos\omega x}{a^2+x^2}dx$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2iae^{i\omega x}dx}{a^2+x^2}$$

这是因为$\sin\omega x$ 是 x 的奇函数。

借助于复变函数积分的计算方法，得

$$\phi(\omega)=e^{-\omega a},\qquad \omega>0$$

例 4.3

求解积分方程

$$\phi(x)=\lambda\int_0^{\infty}\cos\omega x\phi d\omega$$

显然，是x的偶函数。因此只需对正的x求解足够了。为了得到关于全部x的解，只要 用$|x|$代替x即可。

因为余弦变换的逆是另一余弦变换，建议寻求下面形式的解

$$\phi(x)=U(x)\pm V(x)$$

其中

$$V(x)=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\int_0^{\infty}\cos\omega xU(\omega)d\omega$$

于是

$$U(x)\pm\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\int_0^{\infty}\cos\omega xU(\omega)d\omega$$

$$=\lambda\int_0^{\infty}\cos\omega x\left[U(\omega)\pm\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\int_0^{\infty}\cos\omega tU(t)dt\right]d\omega$$

$$=\lambda\int_0^{\infty}\cos\omega xU(\omega)d\omega\pm\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\lambda U(x$$

如果 $\lambda=\pm(2/\pi)^{\frac{1}{2}}$，上式是成立的。

所以，对应$\lambda=(2/\pi)^{\frac{1}{2}}$ 存在一个解$U(x)+V(x)$，而对应 $\lambda=-(2/\pi)^{\frac{1}{2}}$存在另一个解$U(x)-V(x)$。只要所有的积分存在，这些解就是有意义的。由于 $U(x)$为任意函数，故对于两个特征值$\lambda=\pm(2/\pi)^{\frac{1}{2}}$存在无穷多个特征函数。

例 4.4

求解积分方程

$$\phi(x)=f(x)+\lambda\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\int_{0}^{\infty}\cos xy\phi(y)dy$$

若 $\lambda=\pm1$，由例4.3知，方程通常无解。寻求类似例4.3中得到的解，可以借助取原方程的变换来实现。

$$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\int_{0}^{\infty}\cos xy\phi(y)dy=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\int_{0}^{\infty}\cos xyf(y)dy+\lambda\phi(x)$$

从而得

$$(1-\lambda^{2})\phi(x)=f(x)+\lambda\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\int_{0}^{\infty}\cos xyf(y)dy$$

只要积分收敛，这个解就是有效的。若$1-\lambda^{2}=0$，并且$f(x)$是满足

$$f(x)+\lambda\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\int_{0}^{\infty}\cos xyf(y)dy=0$$

的一个函数，由此推知，$\phi(x)$可以是使积分收敛的某一函数。

例 4.5

求解积分方程

$$\phi(x)=\lambda\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega x}\phi(\omega)d\omega$$

设

$$\phi(x)=U(x)\pm V(x)$$

$$V(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega x}U(\omega)d\omega$$

则

$$U(x) \pm \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}U(\omega)d\omega = \lambda\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}U(\omega)d\omega$$

$$\pm \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}d\omega\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega y}U(y)dy$$

若 $\lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$， 这时

$$U(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}d\omega \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega y}U(y)dy \qquad (A)$$

然而，这不是傅立叶积分公式。尽管如此，若U是偶的

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega y}U(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-i\omega y} + 2i\sin\omega y)U(y)dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega y}U(y)dy$$

则方程 (A) 被任何偶函数 U 所满足。于是特征值是 $\pm 1/\sqrt{2\pi}$，与之相应的特征函数为$U(x) \pm V(x)$。

例 4.6

求解积分方程

$$\phi(x) = f(x) + \lambda\int_{-\infty}^{\infty} k(x-y)\phi(y)dy$$

设大写字母表示傅立叶变换，即

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}f(x)dx$$

则

$$\Phi(\omega) = F(\omega) + \sqrt{2\pi}\lambda K(\omega)\Phi(\omega)$$

因而

$$\Phi(\omega)=\left[\ 1+\frac{\sqrt{2\pi}\ \lambda K(\omega)}{1-\sqrt{2\pi}\lambda K(\omega)}\right]F(\omega)$$

置

$$l(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\omega x}K(\omega)}{1-\sqrt{2\pi}\ \lambda K(\omega)}d\omega$$

从而

$$\Phi(x)=f(x)+\int_{-\infty}^{\infty}l(x-y)f(y)dy$$

必须认识到，这个解只是主解。在一定条件下余函数可能存在。考虑

$$\Phi(x)=\lambda\int_{-\infty}^{\infty}k(x-y)\phi(y)dy$$

$$=\lambda\int_{-\infty}^{\infty}K(u)\phi(x-u)du$$

只要

$$1=\lambda\int_{-\infty}^{\infty}k(u)e^{-au}du$$

显然 e^{ax} 是一个解。若 a 给定，上面的积分收敛，它定义了一个特征值 λ。若积分不收敛，则不存在特征值，因而也不存在相应的特征函数。换句话说，若λ给定，（可能）存在一个 a 的超越方程，并且可能有多个特征函数。

可以指出，形式为

$$\phi(x)=f(x)+\int_{0}^{\infty}k(x/y)\phi(y)dy/y$$

的方程，能借助变量代换 $x=e^{\xi}$，$y=e^{\eta}$，将其变换成上面所讨论过的方程形式。

例 4.7

求解积分方程

$$\phi(x)=\lambda\int_0^\infty \frac{\phi(y)dy}{x+y}$$

令 $\quad x=e^\xi,\quad y=e^\eta,\quad \Psi(\xi)=e^{\frac{1}{2}\xi}\phi(x)$

$$\Psi(\xi)=\frac{\lambda}{2}\int_{-\infty}^\infty \operatorname{sech}\frac{1}{2}(\xi-\eta)\psi(\eta)d\eta$$

$$=\frac{2}{\lambda}\int_{-\infty}^\infty \operatorname{sech}\frac{1}{2}\eta\psi(\xi-\eta)d\eta$$

令

$$\psi(\xi)=e^{\alpha\xi}$$

$$1=\frac{\lambda}{2}\int_{-\infty}^\infty \operatorname{sech}\frac{1}{2}\ \eta e^{-\alpha\eta}d\eta$$

而 α 必须是这个方程的解。为使积分收敛，所有可能的 α 必须落在区域

$$-\frac{1}{2}<Re\ \alpha<\frac{1}{2}$$

内。利用傅立叶变换，可得

$$1=\pi\lambda\sec\pi\alpha$$

所以，若α 是它的根，则$-\alpha$也必定是它的根。

值得指出，若 $\lambda=\pi^{-1}$，则 $\alpha=0$ 是重根。事实上，可以得到关于$\psi(\xi)$的方程的解为

$\psi(\xi)=1$，$\psi(\xi)=\xi$。因此

$$\phi(x)=e^{-\frac{1}{2}\xi}\psi(\xi)$$

$$=x^{\alpha-\frac{1}{2}}\qquad 其中\alpha=\frac{1}{\pi}\sec^{-1}(\pi\lambda)$$

$$=x^{-\frac{1}{2}}(A+B\log x) \qquad \text{若} \quad \lambda\pi=1$$

例 4.8

求解 (t) 的积分方程

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}k(x-t)\phi(t)dt$$

和例 4.6 完全一样，可以证明主解是

$$\phi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(\omega)}{K(\omega)}e^{-i\omega x}d\omega$$

只要这个积分是有意义的。可以看出，如果

$$0=\int_{-\infty}^{\infty}k(u)e^{-au}du$$

则存在一个余函数 e^{ax}

例 4.9

求解斯蒂尔吉斯 (Stieltjes) 积分方程

$$f(x)=\int_{0}^{\infty}\frac{g(y)}{x+y}dy$$

令

$$x=e^{\xi}, \quad y=e^{\eta}, \quad e^{\frac{1}{2}\xi}f(x)=p(\xi), \quad e^{\frac{1}{2}\eta}g(y)=q(\eta)$$

则积分方程变为

$$p(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{q(\eta)d\eta}{2\cosh\frac{1}{2}(\xi-\eta)}$$

由例 4.8，且借助复变积分可得

$$q(\xi)=\frac{1}{2\pi}\Big[p(\xi+i\pi)+p(\xi-i\pi)\Big]$$

$$g(x)=\frac{i}{2\pi}\Big[f(xe^{i\pi})-f(xe^{-i\pi})\Big]$$

必须指出，这里的各项应当在复变量的意义下来理解。

例 4.10 （斯蒂尔吉斯矩问题）

确定 $f(x)$，使得

$$\int_0^{\infty} x^n f(x) dx = C_n \qquad (n=0,1,\cdots\cdots)$$

序列 $\{C_n\}$ 是某一给定的数列，具有使级数

$$C(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)C_n u^{2n}}{(2n)!}$$

收敛的性质。

$$C(u) = \int_0^{\infty} f(x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n u^{2n}}{(2n)!} dx = \int_0^{\infty} f(x) \cos u\sqrt{x}\, dx$$

$$= 2\int_0^{\infty} y f(y^2) \cos uy\, dy$$

它的主解是

$$y f(y^2) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} C(u) \cos uy\, du$$

如果 C_n 不取适当的形式，例如，

$$C_n = 1 \qquad C(u) = \cos u$$

则主解可能是广义函数而非通常的函数。形式上有

$$2y f(y^2) = \delta(y-1)$$

需要指出，这里解是不唯一的，并且余函数存在。这是因为

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x^{\mu}\cos\alpha} \sin(x^{\mu}\sin\alpha) dx = \mu^{-1}\Gamma\left(\frac{n+1}{\mu}\right)\sin\left(\frac{n+1}{\mu}\right)\alpha$$

若 $\mu > 0$ 与 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

令 $\alpha = \mu\pi$， n为整数，关系式

$$\int_0^\infty x^n e^{-x^\mu \cos\mu\pi} \sin(x^\mu \sin\mu\pi)dx = 0$$

对所有满足 $0<\mu<\frac{1}{2}$ 的 μ 成立，并且当 $0<\mu<\frac{1}{2}$ 时

$e^{-x^\mu \cos\mu\pi}\sin(x^\mu \sin\mu\pi)$ 为余函数。

4.3　拉普拉斯积分方程

在 3.3 节中，已经讨论了某些积分方程（卷积伏尔特拉方程），它们可以借助拉普拉斯变换求解。还有一些积分方程也可以利用拉普拉斯变换的理论来求解。最直接的应用就是使用逆变换。

若 $f(t)$ 由积分方程

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt \tag{4.7}$$

所定义。则

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{C+i\infty} e^{pt}F(p)dp \tag{4.8}$$

其中 c 是某一实数，它大于所有 $F(p)$ 极点的实部。方程（4.7）表示拉普拉斯变换，而方程（4.8）表示拉普拉斯逆变换。关于这个逆变换的论述在很多书中都有，所以下面仅给出一个初等例子。我们将会看到，t 为负值时函数 $f(t)$ 没定义，因为在方程（4.7）右边的积分是在 $[0,\infty)$ 上进行的，所以问题的提法中不包含 t 为负值时的函数 f 值。

例 4.11

求解积分方程

$$\frac{a}{a^2+p^2} = \int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt \qquad a>0$$

$$F(p)=\frac{a}{a^2+p^2}=\frac{1}{2i}\left\{\frac{1}{p-ai}+\frac{1}{p+ai}\right\}$$

取 $c>a$，则

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}e^{pt}\left\{\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-ai}+\frac{1}{p+ai}\right)\right\}dp$$

由复变积分的计算推得

$$f(t)=\frac{1}{2i}\left(e^{iat}-e^{-iat}\right)=\sin at \quad t>0$$

4.4　希尔伯特变换

若

$$g(u)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)dx}{x-u} \tag{4.9}$$

则

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(u)du}{x-u} \tag{4.10}$$

称 g 为 f 的希尔伯特变换，而 f 为g 的希尔伯特逆变换。方程（4.10）的解为（4.9），反之亦然。我们还记得，解不必总是函数，它可以是广义函数。积分方程的求解，采用下面的途径之一，可能是方便的。考虑方程（4.9）

$$g(u)=\frac{1}{\pi}\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{f(x)dx}{x-u}$$

$$=2i\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{C}\frac{f(z)dz}{z-u} \tag{4.11}$$

其中 C 为 z 平面上的一个迴路，它包含实轴由 $x=-R$ 到 $x=R$的部分，以及中心在原点半径为R的半圆周，并且取逆时针方向。上式最后一步成立的条件是对充分大的 R，有 $f(z)=0(1)$。利用复变积分的计算方法，可得

$$g(u)=2i\left[\frac{1}{2}f(u)+\frac{1}{2}\sum_{\alpha}r(x_{\alpha})(x_{\alpha}-u)^{-1}+\sum_{\beta}r(z_{\beta})\right.$$

$$\left.\times(z_{\beta}-u)^{-1}\right] \tag{4.12}$$

$r(x_{\alpha})$表示函数 $f(z)$ 在实轴上的极点 x_{α} 处的留数，$r(z_{\beta})$ 表示$f(z)$ 在上半平面的极点Z_{β}处的留数。表达式(4.11) 也可以写成另外的形式

$$\frac{1}{\pi}\lim_{R\to\infty}\left[\int_{-R}^{R}\frac{f(x)-f(u)+f(u)}{x-u}dx\right.$$

利用附录 A 的结果，它变为

$$\frac{1}{\pi}\lim_{R\to\infty}\left[\int_{-R}^{R}\frac{f(x)-f(u)}{x-u}dx+f(u)\log\left(\frac{R-u}{R+u}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)-f(u)}{x-u}dx \tag{4.13}$$

因为已经假设在 $x=u$附近$[f(x)-f(u)]/(x-u)$是有限的，所以这个积分变成一通常意义下的积分。

第三个方法如下。可以写出

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{*\infty}\frac{f(x)dx}{x-u}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{*\infty}\left[\frac{f(u+x)-f(u-x)+f(u-x)+f(u+x)}{x}\right]dx$$

最后两项的积分合在一起是零，这是因为被积函数 $x^{-1}[f(u+x)+f(u+x)]$是 x 的奇函数。因而得

$$g(u)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(u+x)-f(u-x)}{x}dx \tag{4.14}$$

由于 $f(u+x)+f(u-x)]$ 在 $x=0$ 处是零，这个积分为通常意义下的积分。它可以用通常的方法计算，例如围道积分法。

例 4.12

求解积分方程

$$\frac{1}{a^2+x^2}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(u)du}{x-u} \qquad (a>0)$$

$$g(u)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(a^2+x^2)(x-u)}$$

为了计算积分将被积函数写成

$$\frac{1}{a^2+x^2}\ \frac{1}{x-u}=\frac{Ax+B}{a^2+x^2}+\frac{C}{x-u}$$

积分又可写成

$$\int_{-\infty}^{\infty}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{u-\varepsilon}+\int_{u+\varepsilon}^{\infty}$$

用通常的方法可以计算积分，但我们这里采有前面已经讨论过的方法。

函数 $f(z)=1/(z^2+a^2)$ 在上半平面有一个极点 $z=ai$，在实轴上无极点。第一个方法给出

$$g(u)=i\left\{\frac{1}{a^2+u^2}\right\}+\frac{2i}{2ai}\ \frac{1}{(ai-u)}=-\frac{u}{a^2+u^2}$$

第二个方法给出

$$g(u)=\frac{1}{\pi}\lim_{R\to\infty}\left[\int_{-R}^{R}\left(\frac{1}{a^2+x^2}-\frac{1}{a^2+u^2}\right)\frac{dx}{x-u}\right]$$

$$=-\frac{1}{\pi}\ \frac{1}{a^2+u^2}\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{x+u}{a^2+u^2}\ dx$$

$$=-\frac{1}{\pi}\frac{u}{a^2+u^2}\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{dx}{a^2+x^2}=-\frac{u}{a^2+u^2}$$

积分的第三个方法是

$$g(u)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{a^2+(u+x)^2}-\frac{1}{a^2-(u-x)^2}\right]\frac{dx}{x}$$

$$= -\frac{2u}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{[a^2+(u+x)^2][a^2+(u-x)^2]}$$

$$= -4iu\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{dz}{[a^2+(u+z)^2][a^2+(u-z)^2]}$$

c 是z 平面上由实轴从 $-R$到R的部分以及半径为R中心在原点的半圆周所组成的取逆时针方向的迴路。在上半平面的极点是

$$Z=u+ai \quad 与 \quad Z=-u+ai$$

从而得

$$g(u)=-4i\pi\left[\frac{1}{2ai[(2u+ai)^2+a^2]}+\frac{1}{2ai[(2u-ai)^2+a]^2}\right]$$

$$=-\frac{u}{a^2+u^2}$$

例 4.13

求解积分方程

$$\frac{1}{a+x}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(y)dy}{x-y}$$

其中 a 为实数。

容易看出，

$$g(y)=-\pi\delta(y+a)$$

是方程的形式解。

4.5 有限希尔伯特变换

考虑函数 $g(u)$，它由下式定义

$$g(u)=\frac{1}{\pi}\int_a^{*b}\frac{f(x)}{x-u}dx \qquad a\leqslant u\leqslant b$$

称 $g(u)$为 $f(x)$ 的有限希尔伯特变换。

显然，通过变量代换总可以化为比较对称的形式

$$g(u)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{f(x)dx}{x-u}\qquad -1\leqslant u\leqslant 1 \tag{4.15}$$

虽然希尔伯特变换与有限希尔伯特变换之间只有表面上的很小差异，但求逆的方法却大为不同。

设

$$x=\cos\phi,\qquad u=\cos\theta$$

通过这种变量代换，方程（4.15）变为

$$g(\cos\theta)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(\cos\phi)\sin\phi}{\cos\phi-\cos\theta}d\phi\qquad 0\leqslant\theta\leqslant\pi \tag{4.16}$$

正是这种变换的形式，给出了求解方程的提示。

首先，注意到若 n 为整数

$$I_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos n\phi d\phi}{\cos\phi-\cos\theta}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos n\phi d\phi}{\cos\phi-\cos\theta}$$

$$=\sin n\theta\operatorname{cosec}\theta$$

上式可借助于变换 $\zeta=e^{i\phi}$，并沿着圆周 $|\zeta|=1$ 积分而得。

考虑 $I_{n+1}-I_{n-1}$ 可得出

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin n\phi\sin\phi d\phi}{\cos\phi-\cos\theta}=-\cos n\theta$$

还应指出，任何一个分段连续的函数可以表示为在 $(0,\pi)$ 上的正弦级数或余弦级数。

令

$$F(\phi)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\phi$$

则

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{F(\phi)d\phi}{\cos\phi-\cos\theta}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin n\theta\operatorname{cosec}\theta$$

这样，若

$$G(\theta)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\theta \tag{4.17}$$

即

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} G(\theta)\sin n\theta d\theta$$

就推出积分方程

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{*\pi}\frac{F(\phi)d\phi}{\cos\phi-\cos\theta}=G(\theta)\operatorname{cosec}\theta \tag{4.18}$$

的解为

$$F(\phi)=\frac{1}{2}b_0+\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\phi \tag{4.19}$$

这可由比较系数 $a_n=b_n$， 当 $n>0$ 时而得；而 b_0 为任意。

同时还有

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{*\pi}\frac{G(\theta)\sin\theta d\theta}{\cos\theta-\cos\phi}=\frac{1}{\pi}\int_0^{*\pi}\frac{\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\theta\sin\theta d\theta}{\cos\theta-\cos\phi}$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos n\phi$$

$$=\frac{1}{2}b_0-F(\phi)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}F(\phi)d(\phi)-F(\phi)$$

故

$$F(\phi)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}F(\phi)d\phi-\frac{1}{\pi}\int_0^{*\pi}\frac{G(\theta)\sin\theta d\theta}{\cos\theta-\cos\phi} \tag{4.20}$$

方程 (4.20) 右端的第一项说明 F 中含有一任意常数，事实上这一常数是 F 在它的定义域上的平均值。由此可见，关于

未知函数F的积分方程(4.18)的解由方程(4.20)给出。反过来，关于G的方程(4.20)的解由方程(4.18)给出。下面求解方程(4.15)。若

$$F(\phi)=F(\cos^{-1}x)=\sqrt{1-x^2}\,f(x) \qquad (4.21)$$

$$G(\theta)=G(\cos^{-1}u)=\sqrt{1-u^2}\,g(u) \qquad (4.22)$$

则方程(4.16)与(4.18)是等价的。因而从方程(4.20)可得出方程(4.16)的解为

$$\sqrt{1-x^2}\,f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi F(\phi)d\phi-\frac{1}{\pi}\int_0^{*\pi}\frac{\sqrt{1-u^2}\,g(u)\sqrt{1-u^2}}{\cos\phi-\cos\theta}d\phi$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}f(x)dx+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{*1}\frac{(1-u^2)^{\frac{1}{2}}g(u)}{u-x}du \qquad (4.23)$$

由于前面的推导

$$\int_0^\pi F(\phi)d\phi=\int_{-1}^{1}f(x)dx$$

是任意的，比如说等于πC。

于是

$$f(x)=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\left\{C+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{*1}\frac{(1-u^2)^{\frac{1}{2}}g(u)}{u-x}du\right\} \qquad (4.24)$$

这就是积分方程(4.15)的解。可见，解不唯一，因此必须附加某些其它的条件，例如$f(x_0)=f_0$。但是，在端点处并不那样简单，因为存在因子$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$，而在端点处f是有限的。因而考虑$f(-1)$为有限的条件。则由方程(4.23)得

$$\int_{-1}^{1}f(x)dx+\int_{-1}^{*1}\frac{(1-u^2)^{\frac{1}{2}}g(u)}{1+u}du=0$$

因此

$$(1-x^2)^{\frac{1}{2}} f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{*1}(1-u^2)^{\frac{1}{2}} g(u)\left(\frac{1}{u-x}-\frac{1}{u+1}\right)du$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{*1}(1-u^2)^{\frac{1}{2}} g(u)\frac{1+x}{(u-x)(u+1)}dx$$

从而有

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}}\int_{-1}^{*1}\left(\frac{1-u}{1+u}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{g(u)du}{u-x} \qquad (4.25)$$

例 4.14

求解积分方程

$$\int_{0}^{*l}\frac{h(u)du}{u-\omega}=1 \qquad 0\leqslant\omega\leqslant l$$

设

$$u=\frac{l}{2}(\xi+1), \qquad \omega=\frac{l}{2}(\eta+1)$$

$$h(u)=f(\xi)$$

积分方程变为

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{*1}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi-\eta}=\frac{2}{\pi} \qquad -1\leqslant\eta\leqslant 1$$

令

$$\xi=\cos\phi, \qquad \eta=\cos\theta, \quad \phi=\cos^{-1}\left(\frac{2u}{l}-1\right)$$

积分方程变为

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{*\pi}\frac{f(\cos\phi)\sin\phi d\phi}{\cos\phi-\cos\theta}=\frac{2}{\pi} \qquad (A)$$

由于

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{*\pi}\frac{d\phi}{\cos\phi-\cos\theta}=1$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{*\pi}\frac{d\phi}{\cos\phi-\cos\theta}=0$$

则

$$f(\cos\phi)\sin\phi=\frac{2\cos\phi}{\pi}+K$$

满足积分方程，其中K为任意常数。从而可得原问题的解。

例 4.15

求解积分方程

$$\int_{-\pi}^{\pi}\phi(y)\log|\cos x-\cos y|dy=f(x)\qquad -\pi\leqslant x\leqslant\pi$$

可以很容易地得到下面两个结论，$f(x)$ 必须为 x 的偶函数，否则方程两边不相容；存在一个奇函数，它可以是关于 y 的任意奇函数。若 ϕ 是方程的解，它是关于 y 的偶函数，则可推得

$$\int_0^{\pi}\phi(y)\log|\cos x-\cos y|dy=\frac{1}{2}f(x)\qquad 0\leqslant x\leqslant\pi$$

令

$$\cos x=\xi\qquad\qquad \text{csoy}=\eta$$

积分方程变为

$$\int_{-1}^{+1}\phi(\cos^{-1}\eta)\log|\xi-\eta|\frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}=\frac{1}{2}f(\cos^{-1}\xi)\quad -1\leqslant\xi\leqslant 1$$

令

$$\phi(\cos^{-1}\eta)=\sqrt{1-\eta^2}\ \Phi(\eta)$$

$$\frac{1}{2}f(\cos^{-1}\xi)=F(\xi)$$

积分方程变为

$$\int_{-1}^{*1} \Phi(\eta)\log|\xi-\eta|d\eta = F(\xi)$$

关于 ξ 微分，得

$$\int_{-1}^{*1} \Phi(\eta)\log|\xi-\eta|d\eta = F(\xi)$$

关于 ξ 微分，得

$$\int_{-1}^{*1} \frac{\Phi(\eta)}{\xi-\eta}d\eta = F'(\xi)$$

从而

$$(1-\eta^2)^{\frac{1}{2}}\Phi(\eta) = C + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{*1} \frac{(1-u^2)^{\frac{1}{2}}F'(u)du}{u-\eta}$$

进而

$$\phi(y) = C + \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{*1} \frac{f'(z)dz}{\cos z - \cos y}$$

4.6 其他的积分变换

当然，还有很多种积分变换，这里我们选出几个，并连同它们的逆变换一起给出，以供参考。但是不举例子，也没有练习。要详细了解这些变换，可参考文献6。在下面，$f(x)$均表示未知的待求函数。

(a) 梅林 (Mellin) 变换

$$\overline{f}(s) = \int_0^\infty f(x)x^{s-1}dx \tag{4.26}$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \overline{f}(s)x^{-s}ds \tag{4.27}$$

其中 c 应使 $\overline{f}(s)$在积分路径上处处有定义，且使积分存在。

(b) 汉克尔 (Hankel) 变换

$$\overline{f}(\xi)=\int_0^\infty xf(x)J_v(\xi x)dx \tag{4.28}$$

$$f(x)=\int_0^\infty \xi\ \overline{f}(\xi)J_v(x\xi)d\xi \tag{4.29}$$

(c) 麦克罗伯特 (Mac Robert) 变换

$$g(u)=\int_0^u xf(x)J_x(xu)dx \qquad \theta\leqslant p<q \tag{4.30}$$

$$f(x)=\int_0^\infty (u-u^{-1})g(u)J_x(xu)du \qquad p<x<q \tag{4.31}$$

(b) 勒让德 (Legendre) 变换

令

$$\overline{f_L}(n)=\int_{-1}^1 f(x)P_n(x)dx \tag{4.32}$$

显然，若 n为偶数，则任何奇函数是余函数，若n为奇数，则任何偶函数是余函数。当n为偶数时，

$$f(x)==\frac{1}{2}\sum_{n=0}^\infty (4n+1)\ \overline{f_L}(2n)P_{2n}(x) \tag{4.33}$$

当n为奇数时

$$f(x)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^\infty (4n-1)\ \overline{f_L}(2n-1)P_{2n-1}(x) \tag{4.34}$$

无论在那种情况，一旦需要，$f(x)$都要用

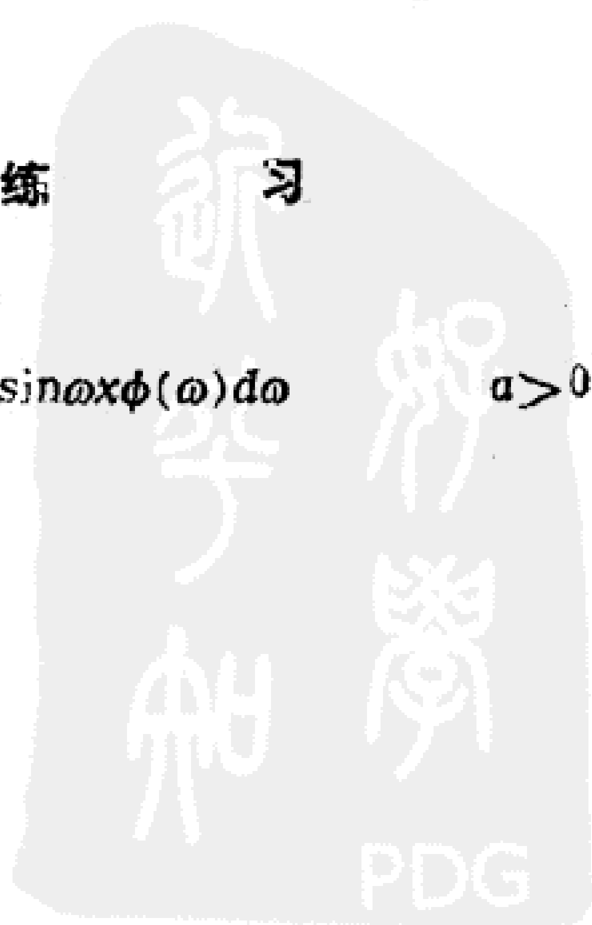
$$\frac{1}{2}\left[f(x-0)+f(x+0)\right]$$

来代替。

练　　习

1. 求解积分方程

$$\frac{x}{a^2+x^2}=\int_0^\infty \sin\omega x\phi(\omega)d\omega \qquad a>0$$



2. 求积分方程

$$\phi(x)=\lambda\int_0^{\infty}\sin xy\,\phi(y)dy$$

的特征值与特征函数。

3. 求解积分方程

$$\phi(x)=e^{-ax}+\lambda\int_0^{\infty}\sin xy\,\phi(y)dy$$

$$a>0,\ (\pi\lambda^2\neq 2)$$

4. 求解积分方程

$$\frac{p}{p^2+a^2}=\int_0^{\infty}e^{-pt}f(t)dt \qquad a>0$$

5. 求积分方程

$$\phi(x)=e^{-a|x|}+\lambda\int_0^{\infty}e^{by}\phi(x-y)dy$$

的主解。

6. 证明积分方程

$$\phi(x)=f(x)+\int_{-\infty}^{\infty}k(x+y)\phi(y)dy$$

的主解为

$$\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{-i\omega x}d\omega$$

其中 $[1-2\pi K(\omega)K(-\omega)]F(\omega)=F(\omega)+\sqrt{2\pi}\,F(-\omega)K(\omega)$，并假定这些运算都是合法的（富克思（Fox）积分方程）。

7. 证明微分——积分方程

$$f'(x)=\lambda\int_0^{\infty}e^{-y}\left[\frac{f(x+y)-f(x-y)}{y}\right]dy$$

存在形式为e^{ax}的解。假若

$$\alpha+\frac{\lambda}{2}\log\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)=0, \quad 且 \quad |\alpha|<1$$

8. 证明积分方程

$$g(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin a(x-y)}{x-y}\phi(y)dy \quad (a>0)$$

的主解为

$$\phi(x)=x\int_{-a}^{a}g(\omega)e^{-ix\omega}d\omega$$

并证明1为余函数。

9. 确定$f(x)$，使

(a) $\int_0^{\infty}x^{2n}f(x)dx=d_n \quad (n=0,1,\cdots)$

(b) $\int_0^{\infty}x^{2n-1}f(x)dx=e_n \quad (n=1,2,\cdots)$

10. 求解积分方程

$$\frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(y)dy}{x-y} \quad (a,b,>0)$$

11. 求解积分方程

$$\frac{1}{(x+a)^2}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(y)dy}{x-y} \quad (a为实数)$$

12. 求解积分方程

$$\int_{-1}^{*1}\frac{f(x)dx}{x-y}=y^2$$

13. 证明积分方程

$$Q(x)=\frac{b}{dx}\int_1^x\frac{P(y)dy}{(y^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

的解为

$$P(y)=2y\int_{y}^{1}\frac{Q(z)dz}{(z^2-y^2)^{\frac{1}{2}}}$$

14. 证明方程

$$\psi(x)=\pi\int_{x}^{\infty}\frac{f'(u)dy}{(u^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

的解为

$$f(u)=-2\int_{u}^{\infty}\frac{y\psi(y)dy}{(y^2-u^2)^{\frac{1}{2}}}+\text{const}$$

5. 近似方法

5.1 概　　述

本章将考虑非线性积分方程解的基本问题以及求解积分方程的近似方法。在很大程度上，处理应具体问题具体分析。非线性方程，因为除了可能应用迭代求解法之外，还没有通用的规则来求解方程。我们提出的方法可能仅适用于所举的例题，但其思想可以作为处理其它问题的途径。应当指出，在这一章中大部分的例题是相当简单的，例如积分可能仅用二项近似来表达，以保证突出方法的实质，避免过多的算法推导和代数演算的影响。

5.2 非线性伏尔特拉方程

考虑第二类非线性伏尔特拉方程

$$\phi(x)=f(x)+\lambda\int_0^x F\{x,y,\phi(y)\}dy \qquad (5.1)$$

（借助于变量代换，积分下限零可用其它任何值代替）。形式上可以定义一个函数序列：

$$\phi^{(n)}(x)=f(x)+\lambda\int_0^x F\{x,y,\phi^{(n-1)}(y)\}dy \quad n\geqslant 1 \qquad (5.2a)$$

$$\phi^{(0)}(x)=f(x) \qquad (5.2b)$$

现在的问题是：在什么条件下，这个函数序列收敛到方程(5.1)的解？我们将作下面一些假设，它们可以不是这个

序列收敛到解的必要条件。但是为了得到收敛的充分条件它将是有用的。学过微分方程的读者将看出下面讨论的方法就是皮卡方法，在3.4 (b) 节中曾简单地讨论过。

假设$f(x)$为 $0\leqslant x\leqslant X$ 上的连续函数（X是有限的但未指定）$F(x,y,z)$关于全部变量在区间 $0\leqslant x\leqslant X$，$0\leqslant y\leqslant x$ $\alpha\leqslant z\leqslant\beta$ 上连续，其中 $\alpha<f(x)<\beta$ 及 $|f(x)|<\gamma$。进而 $F(x,y,z)$ 满足李普希茨 (Lipschitz)条件。

$$|F(x,y,z')-F(x,y,z'')|<k|x'-x''|$$

k 为正常数，且$|F(x,y,z)|<M$. 由于

$$\phi^{(n)}(x)=\sum_{s=1}^{n}\left\{\phi^{(s)}(x)-\phi^{(s-1)}(x)\right\}+\phi^{(0)}(x)$$

所以序列$\{\phi^{(s)}(x)\}$的收敛等价于第 S 项

$$\phi^{(s)}(x)-\phi^{(s-1)}(x)$$

的级数的收敛。

由于

$$|\phi^{(S)}(x)-\phi^{(S-1)}(x)|=|\lambda|\left|\int_0^x F\{x,y,\phi^{(s-1)}(y)\}-F\{x,y,\phi^{(s-2)}(y)\}by\right|$$

$$\leqslant|\lambda|\int_0^x K|\phi^{(s-1)}(y)-\phi^{(s-2)}(y)|dy \qquad (5.3)$$

及

$$\phi^{(1)}(x)-\phi^{(0)}(x)=\lambda\int_0^x F\{x,y,f(y)\}dy$$

随之

$$\phi^{(0)}(x)=f(x)$$

则 $|\phi^{(1)}(x)-\phi^{(0)}(x)|\leqslant|\lambda|\int_0^x|F\{x,y,f(y)\}|dy\leqslant|\lambda|\int_0^x Mdy=M|\lambda|x$

利用归纳法可得

$$|\phi^{(s)}(x)-\phi^{(s-1)}(x)|\leqslant\frac{(K|\lambda|x)^s}{S!}M$$

这是$M\exp\{k|\lambda|x\}$的幂级数的第S项，故级数

$$\varphi^{(0)}(x)+\sum_{s=1}^{\infty}\{\phi^{(s)}(x)-\phi^{(s-1)}(x)\}$$

不论λ取何值，总是绝对一致收敛的，并且它的和

$$\lim_{n\to\infty}\phi^{(n)}(x)$$

将是积分方程（5.1）的解

截断成 n 项级数的误差为

$$R^{(n)}(x)=\phi(x)-\phi^{(n)}(x)=\sum_{s=n+1}^{\infty}\left\{\phi^{(s)}(x)-\phi^{(s-1)}(x)\right\}$$

且

$$|R^{(n)}(x)|\leqslant\sum_{s=p+1}^{\infty}|\phi^{(s)}(x)-\phi^{(s-1)}(x)|\leqslant M\sum_{s=p+1}^{\infty}\cdot\frac{(K|\lambda|x)^s}{S!}$$

$$=M\left\{exp(k|\lambda|x)-\sum_{s=0}^{n}\frac{(k|\lambda|x)^s}{s!}\right\}\tag{5.4}$$

解的唯一性证明如下：设$\phi(x)$与$\psi(x)$是两个可能的解，则

$$\chi(x)=\phi(x)-\psi(x)=\lambda\int_0^x[F\{x,y,\phi(y)\}-F\{x,y,\psi(y)\}]dy$$

而由李普希茨条件

$$|\chi(x)|\leqslant|\lambda|K\int_0^x|\chi(y)|dy$$

设 χ_{max}为函数$\chi(x)$在区间 $0\leqslant x\leqslant X$ 上的最大值，则

$$\chi_{max}\leqslant|\lambda|KX\chi_{max}$$

X为任意且未指定的值。若$X>\{|\lambda|K\}^{-1}$，则关于 F 的条件当然在较小的区间 $0<x<X^*<\{|\lambda|K\}^{-1}$ 上仍成立。因此，必要时，X可用X^*代替，并且可假设 $|\lambda|KX=\Gamma<1$。
因此，

$$\chi_{max}\leqslant\Gamma\chi_{max}$$

这仅当 χ_{max} 为零时才有可能。因此解是唯一的。

第一类非线性伏尔特拉方程

$$\int_0^x F\{x,y,\phi(y)\}dy=f(x) \tag{5.5}$$

可用下面的方法处理：关于x微分得：

$$F\{x,x,\phi(x)\}+\int_0^x\frac{\partial F}{\partial x}\{x,y,\phi(y)\}dy=f'(x)$$

第二次微分得：

$$\left[2\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)+\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)\right]+\left[\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)\right]\phi'(x)$$

$$+\int_0^x\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\{x,y,\phi(y)\}dy=f''(x) \tag{5.6}$$

方括号中的量是在 $y=x$与$z=\phi(x)$处取值。函数序列可以取下面的形式。

$$\phi^{(n)'}(x)=G\{\phi^{(n-1)}(x)\}$$

其中

$$\phi^{(n)}(0)=\xi$$

且ξ由下式定义

$$F(0,0,\xi)=f'(0)$$

至于过分复杂的收敛条件，在这里不予讨论。当然，其解可以直接用微分法求得。

可以证明。若前面提出的关于F的条件不满足，则不含

自由项$f(x)$的第二类积分方程无解，

$$\phi(x)=\lambda\int_0^x F\{x,y,\phi(y)\}dy \qquad (5.7)$$

给予的$F(x,y,0)$ 为零。

由于迭代序列的第一项

$$\phi_1(x)=f(x)+\lambda\int_0^x F\{x,y,\phi(y)\}dy=0 \quad 随之f(x)=0$$

从而推得序列的其它项 $\phi_n(x)$ 也将为零，且序列极 限即方程的解将为零。

例 5.1

求解积分方程

$$\phi(x)=\lambda\int_0^x \{1+\phi^2(y)\}dy$$

关于x微分有：

$$\phi'(x)=\lambda\{1+\phi^2(x)\} \qquad 且 \quad \phi(0)=0$$

它的解显然为 $\tan\lambda x$。在这种情况下，解存在，因为

$$F(x,y,z)=1+z^2 \qquad 与 \quad F(x,y,0)\neq 0$$

例 5.2

写出积分方程

$$\phi(x)=\lambda\int_0^x \{1+\phi^2(y)\}dy$$

的迭代函数序列中的前三个函数。

$$\phi^{(0)}(x)=x$$

$$\phi^{(1)}(x)=x+\lambda\int_0^x (1+xy^2)dy=(1+\lambda)x+\frac{\lambda x^4}{3}$$

$$\phi^{(2)}(x)=x+\lambda\int_0^x \left[1+\left\{(1+\lambda)x+\frac{\lambda x^4}{3}\right\}^2\right]dy$$

$$=(1+\lambda)x+\frac{\lambda x^4}{3}(1+\lambda)+\frac{\lambda^2}{9}(1+\lambda)x^7+\frac{\lambda^3x^{10}}{81}$$

5.3 非线性弗雷德霍姆方程

形式如

$$\phi(x)=f(x)+\lambda\int F\{x,y,\phi(y)\}dy \tag{5.8}$$

的非线性积分方程称为乌莱孙（Urysohn）方程

它的一个特殊情形是汉默斯顿（Hammerstein）方程

$$\phi(x)=f(x)+\lambda\int K(x,y)F\{y,\phi(y)\}dy \tag{5.9}$$

显然，如果有可能，最好讨论更为一般的方程。下面将讨论这种情况。同样地，我们企图构造一个函数序列，它是收敛于解的。并且给出的解为唯一的充分条件。明显地，这个函数序列可以构造为

$$\phi^{(0)}(x)=f(x) \tag{5.10a}$$

$$\phi^{(n)}(x)=\lambda\int F\{x,y,\phi^{(n-1)}(y)\}dy+f(x),\ n>0 \tag{5.10b}$$

所加的条件如下。为了方便，假设x与y落在区间$0\leqslant x,y\leqslant b$。显然，经适当的修改，可以很容易地用于分析含多个变量的问题。设$F(x,y,z)$满足李普希茨条件。

$$|F(x,y,z')-F(x,y,z'')|\leqslant k|z'-z''|$$

其中k为正数。且令

$$|F(x,y,z)|<M$$

其中M是一个正数。由于

$$\phi^{(n)}(x)=\sum_{s=1}^{n}\{\phi^{(s)}(x)-\phi^{(s-1)}(x)\}+\phi_0(x)$$

所以序列$\phi^{(n)}(x)$的收敛性与级数$\phi^{(s)}(x)-\phi^{(s-1)}(x)$的相同。而，

$$|\phi^{(s)}(x)-\phi^{(s-1)}(x)|=|\lambda|\int\{F(x,y,\phi^{(s-1)})(y)\}$$

$$-F\{x,y,\phi^{(s-2)}(y)\}dy|\leqslant|\lambda|\int|F\{x,y,\phi^{(s-1)}(y)\}$$

$$-F\{x,y,\phi^{(s-2)}(y)\}|dy \leqslant |\lambda|K\int|\phi^{(s-1)}(y)-\phi^{(s-2)}(y)|dy$$

又

$$\phi^{(1)}(x)-\phi^{(0)}(x)=\int F(x,y,f(y))dy=A(x)$$

再假定$A(x)$为有限的，$|A(x)|<L$。则可得

$$|\phi^{(s)}(x)-\phi^{(s-1)}(x)|<[|\lambda|K(b-a)]^{s-1}L$$

这样，若 $|\lambda|K(b-a)<1$，这个级数将绝对且一致收敛，而$\phi^{(n)}(x)$将趋向某一函数$\phi(x)$，它将是方程 (5.8) 的 解。

接着是确定解的唯一性。令 $\phi(x),\psi(x)$ 为两 个 解。且$\chi(x)=\phi(x)-\psi(x)$。χ_{max}为$\chi(x)$在区间$a\leqslant x\leqslant b$ 上的最大值。则

$$\chi(x)=\lambda\int[F\{x,y,\phi(y)\}-F\{x,y,\psi(y)\}]dy$$

由于

$$|\chi(x)|\leqslant|\lambda|K\int\chi(y)dy\leqslant|\lambda|K(b-a)\chi_{max}$$

故

$$\chi_{max}\leqslant|\lambda|K(b-a)\chi_{max}$$

现在如果

$$|\lambda|K(b-a)<1$$

则必有 $\chi_{max}=0$

故 $\chi(x)=0$ 这就是迭代过程收敛条件。

从而，若这个迭代过程对充分小的λ收敛，它便收敛到唯一的解。但这并不意味着解对任意的λ是唯一的。近似解在第n步停止时的截断误差为

$$|R^{(n)}(x)|\leqslant|\phi(x)-\phi^{(n)}(x)|$$

$$=\left|\sum_{s=n+1}^{\infty}(\phi^{(s)}(x)-\phi^{(s-1)}(x))\right|$$

$$\leqslant\sum_{s=n+1}^{\infty}\left|\phi^{(s)}(x)-\phi^{(s-1)}(x)\right|$$

$$<\sum_{s=n+1}^{\infty}\left\{|\lambda|K(b-a)\right\}^{s-1}A(x)$$

$$=\frac{|\lambda|K(b-a)^{n}A(x)}{1-|\lambda|K(b-a)}$$

在进一步讨论之前，应注意到，求第一类弗雷德霍姆积分方程

$$\int F\{x,y,\phi(y)\}dy=f(x) \tag{5.11}$$

的解，要靠机遇和模索。在这种情形下，没有类似于希尔伯特-施密特的理论可供应用。因而，除掉下面的附注之外，不再进一步讨论这类问题。我们可以去求由关系式

$$\phi^{(b+1)}(x)=\phi^{(n)}(x)+\mu\left[\int F\{x,y,\phi^{(n)}(y)\}dy-f(x)\right]$$

定义的收敛的函数序列$\phi^{(n)}(x)$，其中 μ 为某一数。若这个级数收敛，它将收敛到方程(5.11) 的解，但是这个解可能不是唯一的，并且得到的解可能依赖于所使用的 μ 值。

现在考虑没有自由项的第二类非线性弗雷德霍姆积分方程

$$\phi(x)=\lambda\int F\{x,y,\phi(y)\}dy \tag{5.12}$$

它可能有依赖于λ的非零解。而在线性情形下，一个非奇性核意味着仅当λ为特征值时方有非零解存在，相应的函数为特征函数。关于方程(5.12)有两点要指出：第一，对给定的λ，积分方程可能有多个解；第二，方程的解未必是实的，即使方程中的所有项形式上都是实的。有可能对于某些实的 λ 值解为实的，而对其它 λ 值解为复的。推广前面的思想，方程(5.12)的解可以看作为对应于特征值 λ 的特征函数。将方程(5.12) 重写成

$$\int F\{x,y,\phi(y)\}dy=\mu\phi(x) \tag{5.13}$$

若函数$\phi(y)$使

$$\phi_{max} \leqslant \int_0^1 (1+y)^{1/2}\ \phi_{max}^{1/2} dy = \frac{2}{3}\left(2^{3/2} - 1\right)\phi_{max}^{1/2}$$

及

$$\phi(x) \leqslant \int_0^1 (x+y)^{1/2}\ \frac{2}{3}\left(2^{3/2} - 1\right) dy = \frac{4}{9}\left(2^{3/2} - 1\right)$$
$$\times\left[(1+x)^{3/2} x^{3/2}\right]$$

类似地

$$\phi_{min} \geqslant \int_0^1 y^{1/2}\ \phi_{min}^{1/2} dy = \frac{2}{3}\phi_{min}^{1/2}$$

以及

$$\phi_{min}^{1/2} \geqslant \frac{2}{3}$$

由此得

$$\phi(x) \geqslant \int_0^1 (x+y)^{1/2}\ \phi_{min}^{1/2} dy = \frac{4}{9}\left[(x+1)^{3/2} - X^{3/2}\right]$$

从而得到了函数 $\phi(x)$ 的下界与上界函数

5.4 线性积分方程的近似解法

有多种求解线性积分方程近似解的方法。它们都是在某种意义上定义一个函数集合，方程的实际解是这个集合中的一个元素。人们力图使这个函数集合中的某些元素，在某种意义上有尽可能多地符合函数$\phi(x)$的性质。若某一元素具有全部这种性质，它便是 $\phi(x)$，但是一般情形下是不会遇到的，实际上这种情况是很偶然的。

(a) 迭代方法

因为线性积分方程可以作为在5.1节和5.2节中讨论过的积分方程的特殊情况，因此可以应用那里提出的迭代方法以

$$\phi_{max} \leqslant \int_0^1 (1+y)^{1/2}\ \phi_{max}^{1/2} dy = \frac{2}{3}\left(2^{3/2}-1\right)\phi_{max}^{1/2}$$

及

$$\phi(x) \leqslant \int_0^1 (x+y)^{1/2}\ \frac{2}{3}\left(2^{3/2}-1\right)dy = \frac{4}{9}\left(2^{3/2}-1\right)$$

$$\times\left[(1+x)^{3/2} x^{3/2}\right]$$

类似地

$$\phi_{min} \geqslant \int_0^1 y^{1/2}\ \phi_{min}^{1/2} dy = \frac{2}{3}\phi_{min}^{1/2}$$

以及

$$\phi_{min}^{1/2} \geqslant \frac{2}{3}$$

由此得

$$\phi(x) \geqslant \int_0^1 (x+y)^{1/2}\ \phi_{min}^{1/2} dy = \frac{4}{9}\left[(x+1)^{3/2} - X^{3/2}\right]$$

从而得到了函数 $\phi(x)$ 的下界与上界函数

5.4　线性积分方程的近似解法

有多种求解线性积分方程近似解的方法。它们都是在某种意义上定义一个函数集合，方程的实际解是这个集合中的一个元素。人们力图使这个函数集合中的某些元素，在某种意义上有尽可能多地符合函数$\phi(x)$的性质。若某一元素具有全部这种性质，它便是 $\phi(x)$，但是一般情形下是不会遇到的，实际上这种情况是很偶然的。

(a)　迭代方法

因为线性积分方程可以作为在5.1节和5.2节中讨论过的积分方程的特殊情况，因此可以应用那里提出的迭代方法以

及相应的误差估计。

例　5.4

求积分方程

$$\phi(x)=\lambda\int_0^1 \sin xy\phi(y)dy+1$$

迭代解的前三个函数。

一次近似为

$$\phi^{(0)}(x)=1$$

二次近似为

$$\phi^{(1)}(x)=\lambda\int_0^1 \sin xydy+1$$
$$=\lambda x^{-1}(1-\cos x)+1$$

$$\phi^{(2)}(x)=\int_0^1 \sin xy[1+\lambda y^{-1}(1-\cos y)]dy+1$$
$$=1+\lambda x^{-1}(1-\cos x)+\lambda^2\int_0^1 \sin xy(1-\cos y)y^{-1}dy$$

参考5.2节。为了估计误差所需的量是

$$A(x)=F\{x,yf(y)\}dy=\int_0^1 \sin xydy=x^{-1}(1-\cos x)$$

$$|F(x,y,z')-F(x,y,z'')|=|\sin xy(z'-z'')|\leqslant\sin|z'-z''|$$

$$K=\sin 1$$

$a=0$　$b=1$　所以

$$|R^{(2)}(x)|\leqslant\frac{|\lambda|^2\sin^2 1}{1-|\lambda|\sin 1}\left(\frac{1-\cos x}{x}\right)$$

假若

$$|\lambda|\sin 1<1 \qquad \text{即} \qquad |\lambda|<1.88$$

也可以应用迭代方法求解第一类积分方程

$$f(x)=\int K(x,y)\phi(y)dy$$

这时必须假定核为非奇异性且是正定的。于是核具有形式

$$K(x,y)=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\phi_s(x)\phi_s(y)}{S}$$

其中 ϕ_s 为完备规范化特征函数集合（见附录G），及特征值满足

$$0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\cdots$$

若这个集合是不完备的，则解须加上一个余函数。

现在构造一个函数序列 $\{\phi^{(n)}\}$

$$\phi^{(n)}(x)-\phi^{(n-1)}(x)=\lambda[f(x)-\int K(x,y)\phi^{(n-1)}(y)dy] \quad (5.14)$$

如果这个序列收敛，它将收敛到所要求的解。接着要考虑的是它在什么条件下收敛。令

$$f(x)=\sum_{s=1}^{\infty}f_s\phi_s(x)$$

其中

$$f_s=\int f(y)\phi_s(y)dy$$

且

$$\phi(x)=\sum_{s=1}^{\infty}\lambda_s\phi_s(x)$$

方程（5.14）可以写为

$$\sum_{s=1}^{\infty}C_s^{(n)}\phi_s(x)=\sum_{s=1}^{\infty}C_s^{(n-1)}\phi_s(x)+\lambda\left\{\sum_{s=1}^{\infty}f_s\phi_s(x)-\sum_{s=1}^{\infty}C_s^{(n-1)}\lambda_s^{-1}\phi_s(x)\right\}$$

因此

$$C_s^{(n)}=C_s^{(n-1)}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_s}\right)+\lambda f_s$$

且

$$C_s^{(n)} - C_s^{(n-1)} = \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_s}\right)\left(C_s^{(n-1)} - C_s^{(n-2)}\right)$$

为了使序列$C_s^{(n)} - C_s^{(n-1)}$趋于零（等价于$C_s^{(n)}$趋于$\lambda_s f_s$），得

$$-1 < 1 - \left|\frac{\lambda}{\lambda_s}\right| < 1 \qquad 即 \quad 0 < \left|\frac{\lambda}{\lambda_s}\right| < 2$$

由于 $\lambda_s \geqslant \lambda_1 > 0$，因而仅当 $0 < \lambda < 2\lambda_1$ 时，上面的条件对所有的S都满足。这使我们明白了为什么核必须是正定的原因。若特征值不同号，则它对全部特征值不可能满足 $\lambda/\lambda_s >0$。所以若 $0 < \lambda < 2\lambda_1$，函数序列 $\phi^{(n)}(x)$ 将收敛到积分方程的解。顺便指出，正如求解线性代数方程组使用迭代方法那样，有时比直接消去法更方便。应用迭代法求解具有退化核的积分方程，比前面提到的传统方法更为容易。迭代过程的某些误差估计可以按下法得到。令

$$R^{(n)}(x) = \phi(x) - \phi^{(n)}(x)$$

则

$$R^{(n)}(x) = R^{(n-1)}(x) - \lambda \int K(x,y) R^{(n-1)}(y) dy$$

假若

$$R^{(n)}(x) = \sum_{s=1}^{\infty} r_s^{(n)} \phi_s(x)$$

$$r_s^{(n)} = r_s^{(n-1)}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_s}\right)$$

及

$$r_s^{(n)} = \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_s}\right)^n r_s^{(0)}$$

迭代的初始函数$\phi^{(0)}(x)$还没有指定。若

$$\phi^{(0)}(x)=0 \qquad R^{(0)}(x)=\phi(x) \qquad \text{与} r_s^{(0)}=\lambda_s t_s$$

及

$$r_s^{(n)}=\left(1-\left|\frac{\lambda}{\lambda_s}\right|\right)\lambda_s f_s$$

由于$\{\lambda_s\}$为单调增加序列。则

$$\int\left\{R^{(n)}(x)\right\}^2dx=\sum_{s=1}^{\infty} r_s^{(n)2}=\sum_{s=1}^{\infty}\lambda_s^2 f_s^2(1-\lambda/\lambda_s)^{2n}$$

$$=\sum_{s=1}^{N}\lambda_s^2 f_s^2(1-\lambda/\lambda_s)^{2n}+\sum_{s=N+1}^{\infty}\lambda_s^2 f_s^2(1-\lambda/\lambda_s)^{2n}$$

$$\leqslant\lambda_1^2(1-\lambda/\lambda_1)^{2n}\sum_{s=1}^{N}f_s^2+\lambda_{N+1}^2\sum_{s=N+1}^{\infty}f_s^2$$

这个不等式对任意的 N 都成立。特别地

$$\int\left\{R^{(n)}(x)\right\}^2dx\leqslant\lambda_1^2\sum_{s=1}^{\infty}f_s^2=\lambda_1^2\int\left\{f(x)\right\}^2dx$$

若$K(x,y)$为具有N项的退化核

$$\int\left\{R^{(n)}(x)\right\}^2dx\leqslant\lambda_1^2(1-\lambda/\lambda_s)^{2n}\sum_{s=1}^{N}f_s^2=\lambda_1^2(1-\lambda/\lambda_s)^{2n}$$

$$\int\left\{f(x)\right\}^2dx$$

这后面的公式可应用于主解

(b) 积分的近似

如前所述，积分方程可以用联立方程组近似，这是因为积分

$$\int_a^b P(y)dy$$

可以近似地用表达式

$$\sum_{\beta=1}^{n}C_\beta P(x_\beta)$$

给出。其中

$$a=y_0\leqslant y_1<\cdots\cdots<y_\beta<y_{\beta+1}\cdots\leqslant y_n=b$$

$$C_\beta=y_\beta-y_{\beta-1}\qquad\qquad y_{\beta-1}\leqslant x_\beta\leqslant y_\beta$$

例如

$$\int_0^{2h}P(y)dy=\frac{h}{3}\Big[P(0)+4P(h)+P(2h)$$

或

$$\int_{-1}^{+1}P(y)dy=P(-1/\sqrt{3})+P(1/\sqrt{3})$$

因而积分方程

$$\phi(x)=\lambda\int K(x,y)\phi(y)dy+f(x)$$

可由方程组

$$\phi(x_\alpha)=\lambda\sum_{\beta=1}^{n}C_\beta K(x_\alpha x_\beta)\phi(x_\beta)+f(x_\alpha)\qquad 1\leqslant\alpha\leqslant n$$

代替，积分方程

$$\int K(x,y)\phi(y)dy=f(x)$$

可由方程组

$$\sum_{\beta=1}^{n}C_\beta K(x_\alpha,x_\beta)\phi(x_\beta)=f(x_\alpha)\quad 1\leqslant\alpha\leqslant n\qquad(5.15)$$

代替，这时积分方程归结为具有 n 个变量的 n 个方程的线性代数方程组的求解。值得指出的是这个方法也可以应用到非线性积分方程，但是方程的求解可能会遇到困难。

例 5.5

$\phi(x)$ 由积分方程

$$\phi(x)-\int_0^1 e^{x}\phi(y)dy=1-x^{-1}(e^{x}-1)$$

定义，求 $\phi(1/4)$与$\phi(3/4)$的近似值。

积分

$$\int_0^1 g(x)dx$$

近似地表为 $\frac{1}{2}[g(1/4)+g(3/4)]$。这是一个粗糙的近似，但是借助于这种非常简单的近似，可以很好地理解这种方法的思想。

因而积分

$$\int_0^1 e^{xy}\phi(y)dy$$

可近似地表为

$$\frac{1}{2}\left[e^{x/4}\phi\left(\frac{1}{4}\right)-e^{3x/4}\phi\left(\frac{3}{4}\right)\right]$$

这时积分方程可以近似地表为关于未知量 $\phi\left(\frac{1}{4}\right)$ 与 $\phi\left(\frac{3}{4}\right)$ 的两个线性方程

$$\phi\left(\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{2}\left[e^{1/16}\phi\left(\frac{1}{4}\right)+e^{3/16}\phi\left(\frac{3}{4}\right)\right]=1-4\left(e^{\frac{1}{4}}-1\right)$$

$$\phi\left(\frac{3}{4}\right)-\frac{1}{2}\left[e^{3/16}\phi\left(\frac{1}{4}\right)+e^{9/16}\phi\left(\frac{3}{4}\right)\right]=1-4\left(e^{3/4}-1\right)$$

这些方程变为

$$4768\phi\left(\frac{1}{4}\right)-6031\phi\left(\frac{3}{4}\right)=-1360$$

$$-6031\phi\left(\frac{1}{4}\right)+1245\phi\left(\frac{3}{4}\right)=-4893$$

$$\phi\left(\frac{1}{4}\right)=1.021 \qquad \phi\left(\frac{3}{4}\right)=1.014$$

（精确解为 $\phi(x)=1$）

(c) 核与自由项的近似

在很多情形下，第二类积分方程的解可以借助于核与自

由项的近似来确定，并可表达为方便可用的包含有误差的形成。

积分方程

$$\phi(x)=\lambda\int K(x,y)\phi(y)dy+f(x) \tag{5.16a}$$

的一个近似解 $\phi^*(x)$ 由积分方程

$$\phi^*(x)=\lambda\int K^*(x,y)\phi^*(y)dy+f^*(x) \tag{5.16b}$$

的解给定。其中$K^*(x,y)$和$f^*(x)$分别为$K(x,y)$和$f(x)$ 的近似，它们比原来的$K(x,y)$和$f(x)$容易处理。例如$K^*(x,y)$可以是退化的，$f^*(x)$ 可以是 n 项幂级数的前几项。实际的性质是不重要的。误差可由下法得到。令

$$\int |K(x,y)-K^*(x,y)|dy<\varepsilon$$

$$|f(x)-f^*(x)|<\eta \qquad |f(x)|<M$$

并且假定与方程（5.16b）有关的预解核 $R^*(x,y,z)$ 满足关系式

$$\int|R^*(x,y,z)|dy<c$$

令

$$r(x)=\phi^*(x)-\phi(x)$$

为了得到$r(x)$的界，首先需要得到$\phi(x)$的界。为此

$$\phi(x)=\lambda\int K^*(x,y)\phi(y)dy+g(x) \tag{5.17a}$$

其中

$$g(x)=f(x)+\lambda\int\{K(x,y)-K^*(x,y)\}\phi(y)dy \tag{5.17b}$$

因此

$$\phi(x)=g(x)+\lambda\int R^*(x,y,\lambda)g(y)dy \tag{5.17c}$$

假设 $max|\phi(x)|=N$，由方程（5.17b）得

$$|g(x)|\leqslant|f(x)|+|\lambda|\int|K(x,y)-K^*(x,y)||\phi(y)|dy\leqslant M+|\lambda|\varepsilon N$$

从方程（5.17c）又得

$$|\phi(x)|\leqslant|g(x)|+|\lambda|\int|R^*(x,y,\lambda)||g(y)|dy$$

这样

$$N\leqslant(1+|\lambda|C)(M+|\lambda|\varepsilon N)$$

以及

$$N\leqslant\frac{M(1+|\lambda|C)}{1-|\lambda|\varepsilon(1+|\lambda|C)} \tag{5.18}$$

若

$$1-|\lambda|\varepsilon(1+|\lambda|C)>0$$

这个除法是有意义的。

式（5.18）说明了原积分方程的所有解都是有界的，解是唯一的，以及λ不是原来积分方程的特征值。

因为$\phi(x)$的界已经得到，就可以估计$r(x)$的界。由方程（5.16）与（5.17）得到

$$r(x)-\lambda\int K^*(x,y)r(y)dy=g(x)-f(x)+f(x)-f^*(x)=h(x)$$

由此

$$r(x)=h(x)+\lambda\int R^*(x,y,\lambda)h(y)dy$$

由于

$$|h(x)\leqslant|g(x)-f(x)|+|f(x)-f^*(x)|\leqslant|\lambda|\varepsilon N+\eta$$

与

$$|r(x)|\leqslant(1+|\lambda|C)(|\lambda|\varepsilon N+\eta)\leqslant(1+|\lambda|C)\left\{\frac{M|\lambda|\varepsilon(1+|\lambda|C)}{1-|\lambda|\varepsilon(1+|\lambda|C)}+\eta\right\} \tag{5.19}$$

另一方面，若

$$|\phi^*(x)|\leqslant N^* \qquad \text{则 } N\leqslant N^*+\rho$$

其中

$$max|r(x)|=\rho$$

于是

$$\rho\leqslant(1+|\lambda|C)\{|\lambda|\varepsilon(N^*+\rho)+\eta\}$$

故

$$\rho\leqslant\frac{(|\lambda|\varepsilon N^*+7)(1+|\lambda|C)}{1-|\lambda|\varepsilon(1+|\lambda|C)} \tag{5.20}$$

当然分母必须为正。

例 5.6

求积分方程

$$\phi(x)=\int_0^{\frac{1}{2}}\cos xy\phi(y)dy+f(x)$$

的近似解。

将 $\cos xy$ 用

$$1-\frac{x^2y^2}{2}$$

代替。$\phi^*(x)$ 是方程

$$\phi^*(x)=\int_0^{1/2}\left(1-\frac{x^2y^2}{2}\right)\phi^*(y)dy+f(x)$$

的解。因而有

$$\phi^*(x)=A+Bx^2+f(x)$$

若

$$\int_0^{\frac{1}{2}}f(y)dy=f_0 \qquad \int_0^{1/2}y^2f(y)dy=f_2$$

则利用通常的方法可以得出

$$A=\frac{2889f_0-60f_2}{1497}$$

与

$$B=\frac{-60f_0-720f_2}{1497}$$

$r^*(x)$ 的大小可以由下面的数据估计：$\lambda=1$

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\left|\cos xy-\left(1-\frac{x^2y^2}{2}\right)\right|dy\leqslant\int_0^{1/2}\frac{x^4y^4}{4}dy$$

$$=\frac{x^4}{120}\leqslant\frac{1}{120}\cdot\frac{1}{16}$$

这样

$$\varepsilon=\frac{1}{1920}$$

$$\phi^*(x)=\frac{1}{1497}\int_0^{1/2}(2889-60x^2-60y^2-720x^2y^2)f(y)dy+f(x)$$

从而

$$R(x,y,1)=\frac{1}{1497}[2889-60x^2-60y^2-720x^2y^2]$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}}|R(x,y,1)|dy$$

$$=\frac{1}{1497}\left[\frac{2889-60x^2}{2}-\frac{(20+240x^2)}{8}\right]$$

$$<\frac{1}{2}$$

如果 $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$，

且

$$C=1/2$$

由于

$$1-|\lambda|\varepsilon(1+|\lambda|C)=1-\frac{1}{1920}\left(1+\frac{1}{2}\right)\approx1$$

故

$$|r(x)| \leqslant \frac{M\frac{1}{1920}\left(1+\frac{1}{2}\right)}{1-\frac{1}{1920}\left(1+\frac{3}{2}\right)} \approx \frac{1}{1280}M$$

(*d*) 配置法

配置法可以用来近似求解第一类与第二类非齐次弗雷德霍姆积分方程。本段我们就第一类方程讨论这种方法，但这一方法同样可应用第二类方程。另外，这个方法也可应用到非线性积分方程，但这里不予讨论。

考虑函数

$$R(\Psi,x)=\int K(x,y)\Psi(y)dy-f(x) \qquad (5.21)$$

若 $\phi(x)$ 是积分方程

$$\int K(x,y)\phi(y)dy=f(x)$$

的解，则

$$R(\phi,x)=0 \qquad (5.22)$$

配置法的想法是，若函数 $R(\Psi,x)$ 在一些点上为零，则 $\Psi(x)$是 $\phi(x)$ 的一个近似。在越多的点上 $R(\Psi,x)$ 为零，则$\Psi(x)$对$\phi(x)$就近似得越好。假设 $\Psi r(x)$，$1\leqslant r\leqslant m$，组成一线性独立的函数集合，例如为x^r，$0\leqslant r\leqslant m-1$。令

$$\Psi(x)=\sum_{r=1}^{m} Cr\Psi r(x)$$

则

$$R(\Psi,x)=\sum_{r=1}^{m} Cr\int K(x,y)\Psi r(y)dy-f(x) \qquad (5.23)$$

于是，假设$R(\Psi,x)$在定义域内的m个点x_i上为零，则

$$\sum_{r=1}^{m} C_r\int K(x_s,y)\Psi_r(y)dy - f(x_s)=0 \quad 1\leqslant s\leqslant m \qquad (5.24)$$

这里有m 个方程，具有m个变量。故C_r可以算出，从而得到近似解。

例 5.7

计算积分方程

$$\int_0^1 e^{xy}\phi(y)dy=(x+1)^{-1}\left[e^{x+1}-1\right],\quad 0\leqslant x\leqslant 1$$

的$\phi(y)$如 a_0+a_1y 形式的近似解。

设

$$R(\Psi,x)=\int_0^1 e^{xy}\Psi(y)dy-(x+1)^{-1}\left[e^{xy}-1\right]$$

则

$$R(\phi,x)=0$$

假设系数 a_0,a_1 由方程

$$R(\Psi,0)=0$$

$$R(\Psi,1)=0$$

$$R(\Psi,0)=\int_0^1(a_0+a_1y)dy-(e-1)=a_0+\frac{1}{2}a_1-(e-1)$$

$$R(\Psi,1)=\int_0^1 e^y(a_0+a_1y)dy-\frac{1}{2}(e^2-1)=a_0(e-1)+a_1-\frac{1}{2}(e^2-1)$$

所确定，解出得

$$a_0=\frac{e-1}{2},\qquad a_1=e-1$$

从而

$$\Psi(x)=\frac{1}{2}(e-1)(1+2x)$$

它可以与方程的精确解 $\phi(x)=e^x$ 相比较。

(e) 伽辽金 (Galerkin) 方法

伽辽金方法求积分方程

$$R(\phi,x)=\int K(x,y)\phi(y)dy-f(x)=0$$

的近似解的基本思想是对任何函数$\chi(x)$都有

$$\int R(\phi,x)\ \chi(x)dx=0$$

因此，若对某些线性独立的函数$\chi_s(x)$，有

$$\int R(\Psi,x)\chi_s(x)dx=0 \tag{5.25}$$

则$\Psi(x)$在某种意义上就是$\phi(x)$的一个近似。并且使$R(\Psi,x)$是直交的函数越多，则 $\Psi(x)$对 $\phi(x)$ 的近似越好。若存在m个这样的线性独立函数χ_s，则在 Ψ 中就有m个常数要去确定。假定$\Psi_r(x)$ $1\leqslant r\leqslant m$ ，形成一线性独立的函数集合，且设

$$\Psi(x)=\sum_{r=1}^{m}Cr\Psi_r(x)$$

从理论的观点出发，函数集合$\Psi_r(x)$与$\chi_s(x)$ 总可以假设是直交规范化的。方程 (5.25) 可写成

$$\sum_{r=1}^{m}\iint Cr\Psi r(y)K(x,y)\chi_s(x)dxdy-\int f(x)\chi_s(x)dx=0 \tag{5.26}$$

即

$$\sum_{r=1}^{m}r_{r,s}Cr=f_s \qquad 1\leqslant s\leqslant m \tag{5.27}$$

其中

$$r_{r,s}=\iint\Psi_r(y)K(x,y)\chi_s(x)dxdy$$

$$f_s=\int f(x)\chi_s(x)dx$$

可以从方程组 (5.27) 中解出Cr，从而得到近似解$\phi(x)$。

第二类积分方程也可以按这种方法讨论，这时应满足的关系式是

$$\iint\left[\psi(x)-\lambda\int K(x,y)\psi(y)dy-f(x)\right]\chi_s(x)dx=0 \quad 1\leqslant s\leqslant m$$

设

$$\psi(x)=f(x)+\sum_{r=1}^{m}Cr\ \psi r(x) \tag{5.28}$$

$$\int \psi_r(x)\chi_s(x)dx=\beta_{r,s}$$

以及

$$\iint\chi_s(x)K(x,y)f(y)dxdy=K_s$$

则式（5.27）变为

$$\sum_{r=1}^{m}(\beta_{r,s}-\lambda\gamma_{r,s})Cr=\lambda K_s \qquad 1\leqslant s\leqslant m \tag{5.29}$$

可见，这个过程等价于将核 $K(x,y)$ 用退化核代替。令

$$V_s(y)=\int K(x,y)\chi_s(x)dx$$

考虑积分方程

$$\Psi(x)-\lambda\int K^{(m)}(x,y)\psi(y)dy=f(x) \tag{5.30}$$

其中

$$K^{(m)}(x,y)=\sum_{i=1}^{m}\chi_i(x)V_i(y) \tag{5.31}$$

可见

$$\iint K^{(m)}(x,y)\psi(y)\chi_s(x)dxdy$$

$$=\iint\sum_{i=1}^{m}\chi_i(x)V_i(y)\psi(y)\chi_s(x)dxdy$$

$$=\int V_s(y)\psi(y)dy$$

$$=\iint K(x,y)\Psi(y)\chi_s(x)dxdy$$

这样，作为方程（5.28）与（5.30）的解 $\psi(x)$是退化核积分方程（5.31）的解，且 5.4（c）节中对界的估计结果可以转用于此处。

例 5.8

利用伽辽金方法求积分方程

$$\phi(x)-\int_0^1 K(x,y)\phi(y)dy=x \qquad 0\leqslant x\leqslant 1$$

的二项近似解。其中

$$K(x,y)=x \qquad x\leqslant y$$

$$=y \qquad x>y$$

方程可以重新写成

$$\phi(x)-\int_0^x y\phi(y)dy-x\int_x^1 \phi(y)dy-x=0$$

求一个如 $\psi(x)=a_0+a_1x$ 形式的近似解。（在这种情况下 $f(x)=x$，所以在$\Psi(x)$中不必再明显地写出来。）

$$\int_0^x y\,\psi(y)dy=a_0\frac{x^2}{2}+\frac{a_1x^3}{3}$$

$$\int_1^x \psi(y)dy=a_0(1-x)+\frac{a_1}{2}(1-x^2)$$

于是

$$\psi(x)-\int_0^1 K(x,y)\Psi(y)dy$$

$$=a_0\left(1-x+\frac{x^2}{2}\right)+a_1\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{6}x^3\right)$$

取 $\chi_1(x)=1$ 和$\chi_2(x)=x$，则有

$$\int_0^1 [R(\psi,x)] - f(x)]dx = \frac{2}{3}a_0 + \frac{7}{24}a_1 - \frac{1}{2} = 0$$

与

$$\int_0^1 [R(\psi,x) - f(x)]xdx = \frac{7}{24}a_0 + \frac{1}{5}a_1 - \frac{1}{3} = 0$$

由此

$$a_0 = \frac{8}{139} = 0.0576$$

$$a_1 = \frac{220}{139} = 1.5827$$

精确解为 sec1 sin$x$

(*f*) 最小二乘方法

设 $\phi(x)$是积分方程

$$R(\psi,x) = \int K(x,y)\psi(y)dy - f(x) = 0$$

的解。若$\omega(x)$在积分区域中处处为正，则

$$I(\psi) = \int [R(\psi,x)]^2\omega(x)dx$$

除$\phi(x)$为零外，所有函数$\psi(x)$为正。因此函数近似于$\phi(x)$的程度可以用量 I 的大小来度量。减小量$I(\psi)$，等价于改善了逼近。

考虑形如

$$\psi(x) = \sum_{r=1}^{n} C_r\psi_r(x) \tag{5.32}$$

的近似，其中ψ_r为线性独立的函数，并可假设已规范化与直交化。于是可以写成

$$I(\psi) = J(C_1,\cdots,C_n)$$

需要考虑的是怎样使J尽可能地小，寻求C_r值使J极小，等价于

求函数 $\phi(x)$ 具有权函数 $\omega(x)$ 的形为方程(5.32)的最佳逼近。

$$R(\psi,x)=\sum_{r=1}^{n}C_r\int K(x,y)\psi_r(y)dy-f(x)$$

$$J(C_1,\cdots C_n)=\left[\sum_{r=1}^{n}C_r\int K(x,y)\psi_r(y)dy-f(x)\right]^2\omega(x)dx$$

使 J 为极小的 c_r 是 n 个方程

$$\left|\frac{\partial J}{\partial c_s}\right|=0 \qquad 1\leqslant s\leqslant n$$

的解，即

$$\int\left\{\sum_{r=1}^{n}c_r\int K(x,y)\psi_r(y)dy-f(x)\right\}\left\{\int k(x,z)\psi_s(z)dz\right\}\omega(x)dx=0$$

$$1\leqslant s\leqslant n$$

令

$$\left[\int K(x,y)\psi_s(z)dz\right]\omega(x)=\chi_s(x)$$

则 c_r 由下式确定

$$\int\left[\sum_{r=1}^{n}c_r\int K(x,y)\psi_r(y)dy-f(x)\right]x_s(x)\,dx=0 \qquad (5.33)$$

即

$$\int R(\psi,x)x_s(x)dx=0 \qquad 1\leqslant s\leqslant n$$

所以求近似解的极小二乘方法所归结的方程与应用伽辽金方法所得到的方程完全相同。因此不必再做例题。但是应当指出，有时可以应用最小二乘方法求非线性积分方程的解。

例 5.9

求积分方程

$$\cos\pi x\int_0^1\{\phi(y)\}^2dy=\phi(x) \qquad 0\leqslant x\leqslant 1 \qquad (5.34)$$

形如 $a+bx^2$ 的近似解。

令

$$J(\psi)=\int_0^1\left[\cos\pi x\int_0^1[\psi(y)]^2dy-\psi(x)\right]^2dx$$

$J(\psi)>0$，除非$\psi=\phi$，那时 $J(\phi)=0$。

$$J(\psi)=\frac{1}{2}\left[\int_0^1[\phi(y)]^2dy\right]^2-2\int_0^1\cos\pi x\psi(x)\int_0^1[\psi(y)]^2dydx$$

$$+\int_0^1[\psi(x)]^2dx$$

$$=\int_0^1[\psi(y)]^2dy\left\{\frac{1}{2}\int_0^1[\psi(y)]^2dy]-2\int_0^1\psi(x)\cos\pi xdx+1\right\}$$

$$=\int_0^1[\psi(y)]^2dyI(\psi)$$

其中 $J(\phi)>0$，除非 $\psi=\phi$，那时 $I(\phi)=0$。若 $\psi(x)=a+bx^2$，可以证明

$$I(\psi)=\frac{1}{2}\left(a^2+\frac{2ab}{3}+\frac{b^2}{5}\right)+\frac{4b}{2\pi^2}+1>0$$

若 $\quad a+\dfrac{b}{3}=0 \qquad \dfrac{a}{3}+\dfrac{b}{5}+\dfrac{4}{\pi^2}=0$

则I (ψ) 关于 a 与 b 达到极小。

因此

$$\psi(x)=\frac{15}{\pi^2}(1-3x^2)$$

它可以与精确值 $2\cos\pi x$ 相比较。

(g) 施温格 (Schwingec) 原则

假设 Q_0 定义为

$$Q_0=\int f(x)\phi(x)dx$$

其中 $f(x)$为已知函数，$\phi(x)$是第一类积分方程

$$f(x)=\int k(x,\ y)\phi(y)dy$$

的解。$k(x,y)$是正定的，现在需要Q_0的近似值。Q_0的另一种表示为

$$\iint\phi(x)k(x,y)\phi(y)dy$$

并且

$$2\int f(x)\phi(x)dx-\int\phi(x)k(x,y)\phi(y)dy$$

定义一个函数

$$Q^*(\alpha\psi)=2\alpha\int f(x)\psi(x)dx-\alpha^2\iint\psi(x)k(x,y)\psi(y)dy$$

α 是一未定的常数。

$$Q^*(\phi)=Q_0$$

设

$$\alpha\psi(x)=\phi(x)+\chi(x)$$

$$\begin{aligned}Q^*(\alpha\psi)=&\ 2\int f(x)\{\phi(x)+\chi(x)\}dx\\&-\iint\phi(x)k(x,y)\phi(y)dxdy\\&-2\iint\chi(x)K(x,y)\phi(y)dxdy\\&-\iint\chi(x)K(x,y)\chi(y)dxdy\\&=Q_0-\iint\chi(x)K(x,y)\chi(y)dxdy<Q_0\end{aligned}\tag{5.35}$$

因为 K 为对称正定，且$\phi(x)$满足积分方程，所以 $Q^*(\alpha\psi)$为Q_0的近似表达，且误差为 $\chi=\phi-\alpha\psi$的二阶量。

由于总有$Q^*(\alpha\psi)<Q_0$，故最佳逼近应是 $Q^*(\alpha\psi)$的极大

量。a是未定常数，$Q^*(a\psi)$为a的二次式，它的极大值当 a满足

$$\frac{\partial Q^*}{\partial a}=0$$

时达到，即

$$a=a_{max}=\frac{\int f(x)\psi(x)dx}{\iint \psi(x)K(x,y)\psi(y)dxdy}$$

这样，量

$$Q(\psi)=Q^*(a_{max}\psi)$$
$$=\frac{\left[\int f(x)\psi(x)dx\right]^2}{\iint \psi(x)K(x,y)\psi(y)dxdy}$$

总小于Q_0（除非 $\psi=\phi$），它与 Q_0的差为一个二阶小量。可以看出$Q(\psi)$是与ψ 的尺度无关。因此当需要更好的近似时，在ψ上引进参数，然后关于这些参数极大化 $Q(\psi)$，可能是合适的。

例 5.10

求积分

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(2+\frac{\pi}{2}\cos x\right)\phi(x)\,dx \tag{5.36}$$

的下界，其中$\phi(x)$ 由积分方程

$$2+\frac{\pi}{2}\cos x=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+\cos x\cos y)\phi(y)dy$$

所确定。

$$Q(\psi)=\frac{\left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(2+\frac{\pi}{2}\cos x\right)\psi(x)dx\right]^2}{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\psi(x)(1+\cos x\cos y)\psi(y)dxdy}$$

则$Q(\psi)$提供了积分的一个下界。若$\psi(x)=1$，可以证明

$$Q(\psi)=(3\pi)^2/(\pi^2+4)=6.11$$

$\phi(x)=\cos x$，而实际的精确值为

$$4+\frac{\pi^2}{4}=6.47$$

5.5 特征值与特征函数的近似计算

(a) 几个一般的假设

本段的讨论只局限于核为

$$K(x,y)=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\phi_s(x)\phi_s(y)}{\lambda_s} \tag{5.37}$$

的情况。其中 ϕ_s形成完备的正交集合，且λ_s排列成

$$|\lambda_n|<|\lambda_{n+1}| \qquad 对所有的\ n$$

在考虑特征值与特征函数时，将使用第n个叠核的迹公式

$$T_rK_n=\sum_{s=1}^{\infty}\lambda_s^{-n} \tag{5.38}$$

若

$$f(x)=\sum_{s=1}^{\infty}f_s\phi_s(x)dx \quad 其中 \quad f_s=\int f(y)\phi_s(y)dy \tag{5.39}$$

则

$$f_n(x)=\int K_n(x,z)f(z)dz=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{f_s}{\lambda_s^n}\phi_s(x) \tag{5.40}$$

其中 K_n 为第 n个叠核。

通常假定仅对第一个特征值λ_1与第一个特征函数 $\phi_1(x)$感兴趣。若对其它特征值与特征函数感兴趣时，将预先说明。还假定特征值已很好地被分隔。这意味着量

$$\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right)^s \text{ 尤其是 } \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+P}}\right)^s, \qquad P>1$$

对适当大的数S是可以忽略不计的。[*]

(b) 凯洛格 (Kellog) 迭代方法

设$f(x)$为某任一函数。考虑函数序列

$$f_n(x)=\int K(x,y)f_{n-1}(y)dy \quad n>0$$

$$f_0(x)=f(x)$$

由方程 (5.40)

$$f_n(x)=\sum_{s=1}^{\infty} f_s\lambda_s^{-n}\phi_s(x)$$

若n充分大，可有

$$f_n(x)\sim f_1\lambda_1^{-n}\phi_1(x) \tag{5.41a}$$

与

$$f_{n+1}(x)\sim f_1\lambda_1^{-(n+1)}\phi_1(x) \tag{5.41b}$$

因而λ_1的近似估值可借助$f_n(x)/f_{n+1}(x)$给出。且

$$\lambda_1=\lim_{n\to\infty} f_n(x)/f_{n+1}(x)$$

显然，$f_{n+1}(x)$ 不能正好是$f_n(x)$的倍数，但是当 n 充分大时，量$f_n(x)/_{n+1}(x)$ 将与一个常数相差无几。因此这一估计是可用的。一个可能的估计是

$$\left\{\frac{\int\left[f_n(x)\right]^2dx}{\int\left[f_{n+1}(x)\right]^2dx}\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{5.42}$$

符号显然可由前后关系来确定

第一个特征函数的近似可由关系式

$$\phi_1(x)\sim\frac{f_n(x)}{\int\left[f_n(x)\right]^2dx} \tag{5.43}$$

(*) 译者注：原文误为适当小。

给出。这个方法的优点在于当K仅由一组数据集合给定时，可以采用数值积分计算。

第二个特征值与特征函数可按下法得到，量

$$f^*(x)=f(x)-\left[\int f(y)\phi_1(y)dy\right]\phi_1(x) \tag{5.44}$$

$$=\sum_{s=2}^{\infty} f_s\phi_s(x)$$

可以说不包含任何 $\phi_1(x)$的元素，能够类似于前面的过程得到λ_2与 $\phi_2(x)$。这个过程可按要求一直进行下去。应当指出，在进行数值积分时，可能出现小的误差。当 $\phi_1(x)$是一个小量，并用它进行计算，$\phi_2(x)$ 有可能被误差淹没。因此建议用

$$f_n^*(x)-\left[\int f_n^*(x)\phi_1(y)dy\right]\phi_1(x)$$

去代替$f_n^*(x)$以达"净化"之目的。可以留心到若恰好$f(x)=K\phi_s(x)$，它就是用这个方法所发现的 ϕ_s与λ_s。因此要十分小心初始$f(x)$是否可能具有类似所期望于 $\phi_1(x)$的性态。还能看出下面的迭代过程将收敛到λ_1：

$$g_n=\frac{\int\left[f_n(x)\right]^2dx}{\iint f_n(x)K(x,y)f_n(y)dxdy}$$

$$=\frac{\int\left[f_n(x)\right]^2dx}{\int f_n(x)f_{n+1}(x)dx}$$

$$=\left(\sum_{s=1}^{\infty} f_s^2/\lambda_s^{2n}\right)\Big/\left(\sum_{s=1}^{\infty} f_s^2/\lambda_s^{2n+1}\right) \tag{5.45}$$

及

$$h_n = \frac{\int f_n(x) f_{n+1}(x) dx}{\int \left[f_{n+1}(x) \right]^2 dx}$$

$$= \left(\sum_{s=1}^{\infty} f_s^2/\lambda_s^{2n+1} \right) \left(\sum_{s=1}^{\infty} f_s^2/\lambda_s^{2n+2} \right) \qquad (5.46)$$

例 5.11

应用凯洛格方法求核

$$K(x,y) = x \qquad 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1$$

$$\quad = y \qquad 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 1$$

的最小特征值。

积分方程为

$$\phi(x) = \lambda \left[\int_0^x y\phi(y) dy + x\int_x^1 \phi(y) dy \right]$$

可见 $\phi(0) = 0$。因此开始迭代的合适函数为 $f(x) = x$。由此得函数序列 $\{f_n(x)\}$ 具有下面的形式

$$f_1(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}x^3$$

$$f_2(x) = \frac{5}{24}x - \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{120}x^5$$

$$f_3(x) = \frac{61}{720}x - \frac{5}{144}x^3 + \frac{1}{240}x^5 - \frac{1}{5040}x^7$$

由于

$$\lambda_1 = \lim_{n \to \infty} g_n(x) \qquad 其中 \quad g_n(x) = f_{n-1}(x)/f_n(x)$$

考虑一个逼近于 λ_1 的两个序列，其定义为

$$g_n(0) = \lim_{n \to 0} g_n(x) \qquad 与 \quad g_n(1)$$

容易看出

$n=1$	2	3
$g_n(0)=2$	$2\frac{2}{5}$	$2\frac{28}{61}=2.426$
$g_n(1)=3$	$2\frac{1}{2}$	$2\frac{24}{51}=2.471$

可以验证，实际的特征值是

$$\lambda_n=\left\{\frac{(2n-1)\pi}{2}\right\}^2$$

特征函数是

$$\sin(2n-1)\frac{\pi x}{2}$$

因此，第一特征值是$\pi^2/4=2.4674$；第一特征函数是$\sin\pi x/2$

请读者计算逐项近似

$$\left\{\frac{\int\left[f_{n-1}(x)\right]^2dx}{\int\left[f_n(x)\right]^2dx}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

并且比较

$$\frac{f_3(x)}{\left\{\int_0^1\left[f_3(x)\right]dx\right\}^{\frac{1}{2}}}\qquad 与\quad \sin\frac{\pi x}{2}$$

(c) 利用迹计算第一特征值

从方程 (5.38) 可推得

$$T_rK_{2n}=\sum_{s=1}^{\infty}\lambda_s^{-2^n}$$

与

$$_sT_rK_{2m-2}=\sum_{s=1}^{\infty}\lambda_s^{-(2^n-2)}$$

由于$|\lambda_i|\leqslant|\lambda|$， $s\geqslant2$， 得

$$\lambda_1^2 \leqslant \frac{T_r K_{2n-2}}{T_r K_{2n}} \tag{5.47}$$

当 n 增大时，$T_r K_n$的符号由λ_1^{-n}来控制，所以对充分大的n，λ_1的符号将与 $T_r K_n / T_r K_{n-1}$相同。同时

$$T_r K_{2n} \leqslant \lambda_1^{-2n}$$

因此

$$\lambda_1^2 \geqslant (T_r K_{2n})^{-1/n} \tag{5.48}$$

由方程 (5.47) 与 (5.48) 可以得到 λ_1^2 的上界与下界。顺便指出，若K 为正定，所有特征值是正的。

且

$$T_r K > \lambda_1^{-1}, \qquad \lambda_1 > (T_r K)^{-1}$$

若 λ_1和λ_2 相当好地同 λ_3 分隔着，用下法能获得λ_2的一个近似。若λ_2以上的所有特征值予以忽略

$$T_r K_n = \frac{1}{\lambda_1^n} + \frac{1}{\lambda_2^n} \tag{5.49}$$

即

$$T_r K_n - \frac{1}{\lambda_1^n} = \frac{1}{\lambda_2^n}$$

还有

$$T_r K_m - \frac{1}{\lambda_1^m} = \frac{1}{\lambda_2^m}$$

因此

$$\frac{T_r K_n - \dfrac{1}{\lambda_1^n}}{T_r K_m - \dfrac{1}{\lambda_1^m}} = \lambda_2^{m-n} \tag{5.50}$$

λ_1 将被确定，若m与n充分大，方程 (5.50) 成立。若 $m-n$

是奇的，λ_2的符号也可得到。这个思想可以推广到确定其它的特征值。

例 5.12

求核

$$\frac{1-\alpha^2}{1-2\alpha\cos(x-y)+\alpha^2} \qquad -\pi\leqslant x,\quad y\leqslant\pi \quad 0<2<1$$

的第一特征值的上界与下界。

借助围道积分可以证明

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(1-\alpha^2)(1-\beta^2)\,dz}{\{1-2\alpha\cos(x-z)+\alpha^2\}\{1-2\beta\cos(y-z)+\beta^2\}}$$

$$=2\pi\frac{1-\alpha^2\beta^2}{1-2\alpha\beta\cos(x-y)+\alpha^2\beta^2} \qquad 0<\alpha,\beta<1$$

重复应用这个公式，给出

$$K(x,y)=\frac{(2\pi)^{n-1}(1-\alpha^{2n})}{1-2\alpha^n\cos(x-y)+\alpha^{2n}}$$

$$T_rK_n=\int_{-\pi}^{\pi}K_n(x,x)dx=(2\pi)^n(1+\alpha^n)$$

对大的n，T_rK_r总是正的，因此λ_1是正的。

$$\lambda_1{}^2\geqslant\frac{1}{(T_rK_{2n})}^{-1/n}=(2\pi)^{-2}(1+\alpha^{2n})^{-1/n}$$

同时

$$\lambda_1{}^2\leqslant\frac{T_rK_{2n-2}}{T_rK_{2n}}=\frac{1}{(2\pi)^2}\left(\frac{1+\alpha^{2n-2}}{1+\alpha^{2n}}\right)$$

在这种情形下，令n趋向无穷时，可得

$$\lambda_1{}^2=\frac{1}{(2\pi)^2}, \qquad \text{故有} \quad \lambda_1=\frac{1}{2\pi}$$

当然这个极限过程是否可以进行到底就不清楚了。

(*d*) 特征值的变分表达

设 λ_n 与 ϕ_n 为积分方程

$$\phi)x)=\lambda\int K(x,y)\phi(y)dy$$

的特征值与特征函数，并且任何函数$\psi(x)$可表示为

$$\psi(x)=\sum_{s=1}^{\infty}C_s\phi_s(x)$$

则由

$$\left[\Lambda(\psi)\right]^{-1}=\frac{\iint\psi(x)K(x,y)\psi(y)dy}{\int[\psi(x)]^2dx}$$

$$=\left(\sum_{s=1}^{\infty}C_s{}^2/\lambda_s\right)\Big/\sum_{s=1}^{\infty}C_s{}^2$$

$$=\lambda_P{}^{-1}+\left(\sum_{\substack{s=1\\s\neq P}}^{\infty}C_s{}^2/(\lambda_s{}^{-1}-\lambda_P{}^{-1})\right)\Big/\left(\sum_{s=1}^{\infty}C_s{}^2\right)\qquad(5.51)$$

定义的泛函$\Lambda(\psi)$与ψ的尺度无关。我们有下面两个推论：

(*a*) 若K为正定核，则

$$[\Lambda(\psi)]>\lambda_1\qquad 当\lambda_s>\lambda_1,\ S>1$$

(*b*) 若 $\psi(x)$几乎等于$\phi_P(x)$，则 $C_s(S\neq P)$同 C_P 比较是小量，而C_P可取为1。因此 $\phi_P(x)$的近似 $\psi(x)$将给出$\Lambda(\psi)$的一个值，这个值接近λ_P，它们的差为一个二阶量。

据此，考虑将 $\phi(x)$的近似用级数

$$\sum_{s=1}^{\infty}a_s\psi_s(x)\qquad(5.52)$$

形式表示，其中 ψ_s 为线性独立函数系。为了方便，但并非必须，取它们作为完备直交函数系的前 n 个元素。它们服从

关系式

$$\int \psi_r(x)\psi_s(x)dx=\delta_{rs}$$

另外的一个系统是由关系式

$$f_r(x)=\int K_r(x,y)f(y)dy \qquad n\geqslant r\geqslant 1$$

定义的函数系，其中$f(x)$任意。除非$f(x)$正好是一个特征函数，否则 f_r 将是线性独立的，它们进而满足适当的边界条件。

积分方程

$$\phi(x)=\lambda\int K(x,y)\phi(y)dy \tag{5.53}$$

的特征值与特征函数的计算等价于求泛函$\Lambda(\psi)$的平稳值。若

$$\psi(x)=\sum_{s=1}^{n} a_s\psi_s(x)$$

$$\Lambda(\psi)=\frac{\int\sum_{r=1}^{n}a_r\psi_r(x)\sum_{s=1}^{n}a_s\psi_s(x)dx}{\iint\sum_{r=1}^{n}a_r\psi_r(x)k(x,y)\sum_{s=1}^{n}a_s\psi_s(y)dxdy}$$

$$=\frac{\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}a_ra_sP_{rs}}{\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}a_ra_sQ_{rs}} \tag{5.54}$$

其中

$$P_{rs}=\int \psi_r(x)\psi_s(x)dx$$

$$Q_{rs}=\iint \psi_r(x)K(x,y)\psi_s(y)dxdy$$

$\Lambda(\psi)$取得平稳值 λ 的条件由

$$\sum_{r=1}^{n}(\lambda Q_{rs}-P_{rs})a_s=0 \quad 1\leqslant r\leqslant n \tag{5.55}$$

给出。上述关于未知量a_s的方程组有非零解的条件是

$$|\lambda Q_{rs}-P_{rs}|=0 \tag{5.56}$$

这个方程有n个根$\lambda_t^{(n)}$，$1\leqslant t\leqslant n$，并且存在相应的特征向量$[a_s^{(t)}]$和对应的函数

$$\Psi_t^{(n)}(x)=\sum_{s=1}^{n} a_s^{(t)}\psi_s(x) \tag{5.57}$$

可以证明，若λ_t 与ϕ_t 是原积分方程的一个特征值与对应的特征函数，则

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_t^{(n)}=\lambda_t \tag{5.58}$$

$$\lim_{n\to\infty}\Psi_t^{(n)}=\phi_t(x) \tag{5.59}$$

当$\Psi_t^{(n)}$已规范化，这个结论的证明冗长且含有复杂的分析（见参考文献7）。

应当指出，由于从方程（5.51）导出的性质（b），在级数

$$\sum_{s=1}^{n} a_s\psi_s(x)$$

中不必取很多项。$\phi_1(x)$ 的近似将给出一个近似的特征值，它具有二阶精度的误差。

例 5.13

求与核

$$K(x,y)=x \qquad 0\leqslant x\leqslant y\leqslant 1$$
$$=y \qquad 0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1$$

相对应的最小特征值的近似值。

由于

$$\int K(x,y)\phi(y)dy=\int_0^x y\phi(y)dy+x\int_x^1 \phi(y)dy$$

取

$$\psi_1(x)=1, \qquad \psi_2(x)=x$$

则

$$P_{11}=1, \qquad P_{12}=0, \qquad P_{22}=\frac{1}{3}$$

$$Q_{11}=\frac{1}{3}, \qquad Q_{12}=\frac{1}{12}, \qquad Q_{22}=\frac{1}{30}$$

特征值方程为

$$\begin{vmatrix} \frac{\lambda}{3}-1, & \frac{\lambda}{12} \\ \frac{\lambda}{12}, & \frac{\lambda}{30}-\frac{1}{3} \end{vmatrix}=0$$

因此

$$\lambda=\frac{4}{3}\left(13\pm\sqrt{124}\right)$$

即 2.4857 或 32.1807。

可以看出，第一个根是第一个特征值 2.4674 的相当好的近似。第二个特征值，事实上为22.207。通常，一个具有 n 项的近似，将仅能对前 $n-1$ 个特征值给出较好的近似。

练　　习

1. 解积分方程

$$\phi(x)=\int_0^x \frac{1+y^2}{1+[\phi(y)]^2}dy$$

2. 求在解积分方程

$$\phi(x)=1+\int_0^x \{[\phi(y)]^{\frac{1}{2}}+y\}dy$$

时产生的函数序列中的前三个函数。

3. 求积分方程

$$\int_0^1 (x+y)^2[\phi(y)]^2 dy=\phi(x)$$

的前二个非平凡的迭代解。

4. 为使积分方程

$$\phi(x)=\lambda\int_{-\pi}^{\pi}(a\cos x\cos y+b\cos 2x\cos 2y)(\phi(y)+[\phi(y)]^3)dy$$

的解是实的，在实数 λ，a，b 上应施加什么条件。

5. 应用迭代法证明积分方程

$$\phi(x)=\int_0^x \frac{y\phi(y)dy}{1+[\phi(y)]^2}$$

无非平凡解。

6. 求积分方程

$$\phi(x)=\sin x+\int_0^1 \cos xy\phi(y)dy$$

对小参数 x 适用的形如 $a_0+a_1x+a_2x^2$ 的近似解，并估计其误差。

7. 利用 5.3b 节中的方法求 $\phi\left(\frac{1}{4}\right)$与 $\phi\left(\frac{3}{4}\right)$ 的近似值。其中 $\phi(x)$ 为练习 6 的积分方程的解。

8. 求积分方程

$$\phi(x)=\int_0^1 \sin xy\phi(y)+f(x)$$

当 $\sin z$ 被 $z-z^3/6$ 近似代替时，其解的误差。

9. 利用配置法求积分方程

$$\int_0^1 e^{-x^2y^2}\phi(y)dy=2(1-x)^2 \qquad 0\leqslant x\leqslant 1$$

的形如 $a+by^2$ 的近似解。

10. 利用伽辽金方法求积分方程

$$\phi(x)-\int_0^1 K(x,y)\phi(y)dy=x \qquad 0\leqslant x\leqslant 1$$

的二项近似解。其中

$$K(y,x)=x(1-y \qquad x\leqslant y$$
$$=y(1-x) \qquad x\geqslant y$$

11. 用最小二乘方法求积分方程

$$\int_0^1 K(x,y)\phi(y)dy=x^2 \qquad 0\leqslant x\leqslant 1$$

具有权函数 $\omega(x)=1$ 的最优解。其中

$$K(x,y)=x \qquad x\leqslant y$$
$$=y \qquad x\geqslant y$$

12. 求积分方程

$$\sin\pi x \int_0^1 [\phi(y)]^2dy=\phi(x) \qquad 0\leqslant x\leqslant 1$$

形如 $ax+bx^3$ 的近似解，并与其解 比 较。

13. 求积分

$$\int_0^1 x\phi(x)dx$$

的下界。其中 $\phi(x)$ 由积分方程

$$x=\int_0^1 K(x,y)\phi(y)dy$$

定义，且

$$K(x,y)=x(1-y) \qquad x\leqslant y$$
$$=y(1-x) \qquad x\geqslant y$$

14. 求对应于核

$$K(x,y)=x \qquad 0\leqslant x\leqslant y\leqslant 1$$
$$=y \qquad 0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1$$

的第一特征值的上、下界及近似的第二特征值。

15．求对应于核

$$K(x,y)=\frac{1}{2}x(2-y) \qquad 0\leqslant x\leqslant y\leqslant 1$$

$$=\frac{1}{2}y(2-x) \qquad 0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1$$

的前两个特征值。

附　　录

(A) 累次积分

当n为零或正数时，设$I_nf(x)$定义如下：

$$I_nf(x)=\int_{x_0}^{x}\frac{(x-\xi)^{n-1}}{(n-1)!}f(\xi)d\xi \quad n>1$$

$$=\int_{x_0}^{x}f(\xi)d\xi \quad n=1$$

$$=f(x) \quad n=0$$

故若$n>1$

$$\frac{d}{dx}\left\{I_nf(x)\right\}=\frac{(x-x)^{n-1}}{(n-1)!}f(x)$$

$$+\int_{x_0}^{x}\frac{(x-\xi)^{n-2}}{(n-2)!}f(\xi)d\xi=I_{n-1}f(x)$$

并且

$$I_nf(x_0)=0 \qquad n\geqslant 1$$

所以

$$I_nf(x)=\int_{x_0}^{x}dx_1\int_{x_0}^{x_1}dx_2\cdots\int_{x_0}^{x_{n-1}}f(\xi)d\xi$$

$$=\left[\int_{x_0}^{x}\right]^nf(\xi)d\xi$$

(B) 布尼亚可夫斯基—柯西—施瓦兹不等式

有一类冠以三个数学家之一的名字的熟知不等式。考虑量

$$\int_a^b \{\alpha\phi(x)+\beta\psi(x)\}^2 dx$$

其中各个量均为实的。它是正的（除非 $\alpha\phi(x)+\beta\psi(x)$ 为零）。所以

$$\alpha^2\int_a^b \phi^2\,dx+2\,\alpha\beta\int_a^b \phi\psi dx+\beta^2\int_a^b \psi^2 dx\geqslant 0$$

然而

$$A\alpha^2+2H\alpha\beta+B\beta^2\geqslant 0$$

的条件是

$$H^2\leqslant AB$$

从而有

$$\left\{\int_a^b \phi\psi\,dx\right\}^2\leqslant\int_a^b \phi^2 dx\int_a^b \psi^2 dx$$

对于级数 $\sum_n a_n$，$\sum_n b_n$ 也有类似的不等式

$$\left(\sum_n a_n b_n\right)^2\leqslant\left(\sum_n a_n^2\right)\left(\sum_n b_n^2\right)$$

对复量，这些不等式分别取下面的形式

$$\left|\int_a^b \phi\overline{\psi}\,dx\right|^2\leqslant\left(\int_a^b |\phi|^2 dx\right)\left(\int_a^b |\psi|^2 dx\right)$$

及

$$\left|\sum_n a_n\overline{b_n}\right|^2\leqslant\left(\sum_n |a_n|^2\right)\left(\sum_n |b_n|^2\right)$$

(C) 连续性定理

设 $K(x,y)$关于变量 x 在 $c\leqslant x\leqslant d$ 上是有界且连续的。且设

$$\int_a^b |\psi(y)|^2 dy$$

存在。令

$$u(x)=\int_a^b K(x,y)\psi(y)dy \qquad c\leqslant x\leqslant d$$

则

$$u(x+h)-u(x)=\int_a^b [K(x+h,y)-K(x,y)]\psi(y)dy$$

利用附录B的不等式，得

$$|u(x+h)-u(x)| \leqslant \int_a^b |K(x+h,y)-K(x,y)|^2 dy \times \int_a^b |\psi(y)|^2 dy$$

由此推得$|u(x+h)-u(x)|$将随h而趋于零，这表明u是 连续的。

(D) 诺伊曼级数的收敛性

设

$$\left\{A(x)\right\}^2=\int |K(x,y)|^2 dy$$

$$\{B(y)\} = \int |K(x,y)|^2 dx$$

及

$$\int \{A(x)\}^2 dx = \int \{B(y)\}^2 dy = N^2$$

即

$$\iint |K(x,y)|^2 dxdy$$

有界。借助于附录 B有

$$|K_2(x,y)|^2 = \left|\int K(x,z)\ K(z,y)dz\right|^2$$

$$\leqslant \{A(x)\}^2\{B(y)\}^2$$

$$|K_3(x,y)|^2 = \left|\int K(x,z)K_2(z,y)dz\right|^2$$

$$\leqslant \int |K(x,z)|^2\ dx \int |K_2(z,y)|^2 dz$$

$$\leqslant \{A(x)\}^2 \int \{A(z)\}^2\{B(y)\}^2 dr$$

$$= \{A(x)\}^2\{B(y)\}^2 N^2$$

一般地有

$$|K_{n+2}(x,y)|^2 \leqslant \{A(x)\}^2\{B(y)\}^2 N \qquad n \geqslant 0$$

级数

$$\sum_{n=2}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(x,y)$$

由级数

$$A(x)\ B(y) \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda|^{n-1} N^{n-2}$$

所控制。后者是公比为 $|\lambda|N$ 的几何级数。因此，当 $|\lambda| < N^{-1}$ 时，前面的级数一定收敛。当积分区间为无穷时，只要积分收敛，这个证明同样适用。

（E） 正定埃尔米特核特征值的存在性证明

若$\phi(x)$与λ分别为对应于核$k(x,y)$的特征函数与特征值，则

$$\int|\phi(x)|^2dx=\lambda\iint\overline{\phi}(x)K(x,y)\phi(y)dxdy$$

为了方便，将它写为简短的形式$\overline{\phi}\,\phi=\lambda\overline{\phi}K\phi$。并在证明中从始至终使用这种形式。

设

$$I(\psi)=\overline{\psi}K\psi,\quad J(\psi)=\overline{\psi}\psi$$

$I(\psi)$与$J(\psi)$都是依赖于任意函数$\psi(x)$的正实数。

因此，数$\Lambda(\psi)=J(\psi)/I(\psi)$也是依赖于函数$\psi$的正实数（除去$\psi$处处为零的情形），$\Lambda$，$I$，$J$称为泛函。

构造一函数序列

$$\psi^{n+1}(x)=\int K(x,y)\psi^n(x)dy\quad 或\quad \psi^{n+1}=K\psi^n$$

ψ^0的精确形式并不重要。

令

$$J(\psi^n)=J^n,\quad I(\psi^n)=I^n,\quad \Lambda=J^n/I^n$$

若ψ^n处处有限，则ψ^{n+1}也处处有限。同样的结论对I^n，J^n与Λ^n也成立。

因为

$$I^n=\overline{\psi}K\psi=\overline{\psi}\psi^{n+1}$$

及

$$I(\alpha\psi^n+\beta\psi^{n+1})=\alpha^2I^n+2\alpha\beta J^{n+1}+\beta^2I^{n+1}>0$$

以及当α与β是实数

$$J(\alpha\psi^n+\beta\psi^{n+1})=\alpha^2J^n+2\alpha\beta I^n+\beta^2J^{n+1}>0$$

由此推得

$$I^nI^{n+1}>(J^{n+1})^2$$
$$J^nJ^{n+1}>(I^n)^2$$

故

$$\Lambda^n=J^n/I^n>I^n/J^{n+1}>\frac{J^{n+1}}{I^{n+1}}=\Lambda^{n+1}$$

这样 Λ^n 为正的递减序列，它必趋于一极限 λ_1，λ_1 或者为正的或者为零。但它不可能为零，因为这将意味着存在一个不恒为零的 ψ 使 $J(\psi)$ 为零。因为 λ_1 为正，且

$$\lim_{n\to\infty}J^n/I^n=\lambda_1$$

及

$$\Lambda^n\geqslant\lambda_1>0$$

于是

$$0\leqslant(\overline{\psi^n}-\lambda_1\overline{K}\,\overline{\psi^n})(\psi^n-\lambda_1K\psi^n)$$
$$=\overline{\psi^n}\psi^n-2\lambda_1\overline{\psi^n}K\psi^n+\lambda_1{}^2\overline{K}\;\overline{\psi^n}K\psi^n$$
$$=\overline{\psi^n}\psi^n(1+\lambda_1{}^2/\Lambda^{2n})\;-2\lambda_1\overline{\psi^n}K\psi$$
$$\leqslant2\{J^n-\lambda_1I^n\}$$

因为

$$\lim_{n\to\infty}J^n/I^n=\lambda_1$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\psi^n-\lambda_1K\psi^n=0$$

现在假设函数 ψ^n 是规范化的，即$J^n=1$。集合 ψ^n 有界并且序列

$$\psi^{n+1}=K\psi^n$$

是列紧的，从而有极限函数，即序列 $\psi^n(x)$存在一极限函数

$\Phi_1(x)$。它是规范化的，即 $J(\phi_1)=1$。取极限得

$$\lambda_1\int K(x,y)\Phi_1(y)dy=\phi_1(y)$$

所以，存在一特征值 λ_1 及相应的规范化的特征函数 ϕ_1，使 $J(\phi_1)=1$，从而推知

$$\lambda_1\iint\overline{\Phi}_1(x)K(x,y)\Phi_1(y)dxdy=1$$

(F) 收敛与平均收敛

考虑序列$\{C_n(x)\}$：

$$C_n(x)=\sum_{p=1}^{n}c_p\Phi_p(x)$$

若

$$\lim_{n\to\infty}C_n(x)=C(x)$$

则称 $C_n(x)$收敛于 $C(x)$。这是通常的收敛概念。如果这个条件不满足，但

$$\lim_{n\to\infty}\int|C(x)-C_n(x)|^2dx=0$$

则称序列 $C_n(x)$在积分区域上平收敛于 $C(x)$。显然，收敛的函数序列也一定平均收敛，但反之却不然。我们也可以称 $C_n(x)$ 为在平均的意义下近似于$C(x)$。

设 $\Phi_r(x)$为一无穷规范化直交系，即

$$\int\overline{\Phi}_r(x)\Phi_s(x)dx=\delta_{rs}$$

考虑

$$I_n=\iint\left|f(x)-\sum_{r=1}^{n}f_r\Phi_r(x)\right|^2dx>0$$

其中

$$f_r=\int f(x)\overline{\Phi}_r(x)dx$$

即 f_r 为函数 f 按 Φ_r 展开时的傅立叶系数。

容易证明

$$I_n=\int|f(x)|^2dx-\sum_{r=1}^{n}|f_r|^2$$

$$=\int|f(x)|^2dx-\sum_{r=1}^{\infty}|f_r|^2+\sum_{r=n+1}^{\infty}|f_r|^2$$

因此序列

$$\sum_{r=1}^{n}f_r\Phi_r(x)$$

平均收敛于$f(x)$的必要且充分的条件是 I_n 趋向于零，即

$$\int|f(x)|^2dx=\sum_{r=1}^{\infty}|f_r|^2\quad\text{（巴塞伐尔方程）}$$

并且直交系 $\Phi_r(x)$是完备的。若$f(x)$与$g(x)$在平均的意义下分别为

$$\sum_{r=1}^{\infty}f_r\Phi_r(x)\quad\text{与}\quad\sum_{r=1}^{\infty}g_r\Phi_r(x)$$

所近似，则 $\alpha f+\beta g$ 在平均的意义下由

$$\sum_{r=1}^{\infty}(\alpha f_r+\beta g_r)\Phi_r(x)$$

所近似。所以

$$\int|\alpha f+\beta g|^2dx=\sum_{r=1}^{\infty}|\alpha f_r+\beta g_r|^2$$

因而

$$\int\overline{f}(x)g(x)dx=\sum_{r=1}^{\infty}\overline{f}_rg=\sum_{r=1}^{\infty}\overline{f}_r\int g(x)\overline{\Phi}_r(x)dx$$

(G) 完备直交函数系

假设 $\phi_r(x)$为区域 D上的规范化直交函数系，即

$$\int\overline{\phi_r}(x)\phi_s(x)dx=\delta_{rs}$$

（所有的积分取在D上）。

若定义在D上的任意函数$f(x)$可以按这些函数展开，令

$$f(x)=\sum_{s=1}^{\infty}f_s\phi_s(x)$$

f_s 可以按下法计算

$$\int f(x)\overline{\phi_r}(x)\,dx=\int\sum_{s=1}^{\infty}f_s\,\phi_s(x)\overline{\phi_r}(x)\,dx=f_r$$

现在考虑级数

$$\sum_{s=1}^{\infty}\left[\int f(x)\overline{\phi_s}(x)dx\right]\phi_s(x)$$

即使这个级数收敛，它可能不收敛于$f(x)$。假若这个级数确实几乎处处以$f(x)$为极限，则直交函数系 ϕ_r是完备的。由附录 F

$$\int|f(x)|^2dx=\sum_{r=1}^{\infty}|f_r|$$

与

$$\int\overline{f}(x)g(x)dx=\sum_{r=1}^{\infty}\overline{f_r}\,g_r$$

可知，若

$$\int|f(x)|^2dx$$

是有限的，则级数

$$\sum_{r=1}^{\infty}f_r{}^2$$

将收敛。

若函数系 ϕ_r 是不完备的，显然上面的结论仍然成立。即

$$\sum_{r=1}^{\infty} f_r^{\,2}$$

是收敛的，因为这时相当于从一个收敛的级数中抽出一些项。"完备"这一术语的含义，事实上就是对于展开式中每一个 ϕ_r 都是需要的。若任何一个被排除在外，这个级数就不可能表示任意函数$f(x)$。借助傅立叶级数可以说明这一事实。众所周知，若$f(x)$在 $-\pi<x<\pi$ 中仅有有限个第一类间断点，则级数

$$\frac{1}{2}c_0+\sum_{n=1}^{\infty}(c_n\cos nx+d_n\sin nx)$$

其中

$$c_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)\cos ny\,dy \qquad n\geqslant 0$$

$$d_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)\sin ny\,dy \qquad n>0$$

收敛到

$$\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\} \qquad -\pi<x<\pi$$

$$\frac{1}{2}\{f(-\pi+0)+f(\pi-0)\} \quad 在x=\pm\pi$$

其中 $f(x+0)$表示$\lim\limits_{\alpha\to 0}f(x+\alpha)$，$\alpha>0$。

因此这个级数除了$f(x)$的间断点外收敛到$f(x)$，即几乎处处收敛。直交函数系

$$\phi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad \phi_{2s-1}(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\sin sx$$

$$\phi_{2s}(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\cos sx \qquad s>0$$

在$-\pi<x<\pi$上是完备的。然而，若ϕ_r中的一个，例如常数项被排除，那么级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(c_n\cos nx+d_n\sin nx)$$

一般将不表示$f(x)$。

因此立即推知，若

$$\int g(x)\overline{\phi_r}(x)dx=0 \qquad \text{对所有 } r$$

则$g(x)$几乎处处为零。如果函数系ϕ_r不完备，但可以补充一函数系$\phi_s{}^*$使其完备化。则对于任何形为$\sum_s g_s\phi_s{}^*$的$g(x)$，其中g_s为任意，关系式

$$\int g(x)\overline{\phi_r}(x)dx=0$$

成立。

(H) 广义积分与积分主值

考虑量

$$\int_a^b \frac{f(x)dx}{x-c}$$

其中$a<c<b$，$f(x)$处处可微。根据通常把积分看作和的极限的定义，它就无定义，这是因为在积分区间中出现了奇异性。因而考虑

$$I(\varepsilon)=\int_a^{c-\varepsilon}\frac{f(x)}{x-c}dx+\int_{c+\varepsilon}^{b}\frac{f(x)}{x-c}dx$$

其中$\varepsilon>0$，$c-\varepsilon>a$，$c+\varepsilon<b$。这个积分已很好地被定义，因为不再存在奇异性了。积分的奇异性已借助于关于奇点对称的长度为2ε的区间给排除了。

$$I(\varepsilon)=\int_a^b \frac{f(x)-f(c)}{x-c}dx-\int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon}\frac{f(x)+f(c)}{x-c}dx$$

$$+f(c)\left[\int_a^{c-\varepsilon}\frac{dx}{x-c}+\int_{c+\varepsilon}^{b}\frac{dx}{x-c}\right]$$

所有这些积分已都很好地被定义。前两个积分中，在$x=c$处的表面的奇异性并无关系，因为

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=f'(c)$$

它是有限的。同时

$$\int_a^{c-\varepsilon}\frac{dx}{x-c}+\int_{c+\varepsilon}^{b}\frac{dx}{x-c}=\log\left(\frac{b-c}{c-a}\right)$$

所以

$$I(\varepsilon)=\int_a^b \frac{f(x)-f(c)}{x-c}dx+f(c)\log\left(\frac{b-c}{c-a}\right)$$

$$-\int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}dx$$

量

$$\lim_{\varepsilon\to 0}I(\varepsilon)=\int_a^b \frac{f(x)-f(c)}{x-c}dx+f(c)\log\left(\frac{b-c}{c-a}\right)$$

称为积分

$$\int_a^b \frac{f(x)dx}{x-c}$$

的主值。记为

$$\int_a^{*b}\frac{f(x)dx}{x-c}$$

（I） 广义函数

考虑如下定义的函数

$$\delta_\varepsilon(x) = K_\varepsilon \exp[-\varepsilon^2/(\varepsilon^2 - x^2)] \qquad 0 \leqslant x^2 < \varepsilon^2$$

$$= 0 \qquad \varepsilon^2 \leqslant x^2, \quad \varepsilon > 0$$

其中 K_ε 由关系式

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta_\varepsilon(x) dx = 1$$

决定。$\delta_\varepsilon(x)$具有下述性质

$$\int_a^b \delta_\varepsilon(x) dx = 0 \qquad \text{如果 } a, b \leqslant -\varepsilon$$

$$= 1 \qquad \text{如果 } a \leqslant -\varepsilon, \ \varepsilon \leqslant b$$

$$= 0 \qquad \text{如果 } \varepsilon \leqslant a, \ b$$

此外它的所有各阶导数对全部实数 x 都是连续的。

假设$f(x)$是满足关系

$$|f(x) - f(0)| \leqslant M|x| \qquad |x| \leqslant \eta \geqslant \varepsilon \qquad \text{(A)}$$

的任一函数，其中 M 为正数。则

$$|f(x) - f(0)| \leqslant M\varepsilon \qquad |x| \leqslant \varepsilon$$

考虑量

$$I(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_\varepsilon(x) dx - f)0)$$

$$= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} [f(x) - (0)] \delta_\varepsilon(x) dx$$

那么

$$|I(\varepsilon)| \leqslant M\varepsilon \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta_\varepsilon(x) dx = M\varepsilon$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} I(\varepsilon) = 0$$

即

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_\varepsilon(x) dx = f(0)$$

$\delta_\varepsilon(x)$在区间$|x| \leqslant \varepsilon$之外为零，并且当 ε 减小时，$\delta_\varepsilon(x)$的图形

将愈来愈窄，愈来愈高，但图形下的面积总保持为1。显然，ε 不能为零，因为那时 $\delta_\varepsilon(x)$ 无定义。

若 $f(x)$ 的导数满足类似于前面的条件（A）

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta_\varepsilon'(x)f(x)dx=\left[\left[\int_{-\infty}^{\infty}\delta_\varepsilon(x)f(x)\right]\right.-\int_{-\infty}^{\infty}\delta_\varepsilon(x)f'(x)dx$$

$$=-\int_{-\infty}^{\infty}\delta_\varepsilon(x)f'(x)dx$$

类似地

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta_\varepsilon^{(n)}(x)f(x)dx=(-1)^n\int_{-\infty}^{\infty}\delta_\varepsilon(x)f^{(n)}(x)dx$$

现在定义量 $\delta(x)$—狄拉克(Dirac)δ 函数。它不是一函数，但通常称为广义函数或分布函数。不确切地，它可视为

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\delta_\varepsilon(x)$$

$\delta(x)$ 的定义如下

$$\delta(x)=0\qquad x\neq 0$$

与

$$\int\delta(x)f(x)dx=f(0)$$

或者换一种形式

$$\int_a^b f(x)\delta(x)dx=0\qquad a<b<0$$

$$=1\qquad a<0<b$$

$$=0\qquad 0<a<b$$

类似地，形式导数 $\delta^{(n)}(x)$ 定义为

$$\delta^{(n)}(x)=0\qquad x\neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta^{(n)}(x)f(x)dx=(-1)^n f^{(n)}(0)$$

下面的性质成立：

$$\int_a^b f(x)\delta(x-\xi)dx=0 \qquad a<b<\xi$$

$$=f(\xi) \quad a<\xi<b$$

$$=0 \qquad \xi<a<b$$

$$\int_{-\infty}^{x}\delta(x')dx'=0 \qquad x<0$$

$$=1 \qquad x>0$$

这就是所谓的海维赛德（Heaviside）函数或单位函数。显然

$$\int_0^\infty e^{-px}\delta(x)dx=1$$

若奇异性刚好在原点的右边，同时

$$\int_0^\infty e^{-px}\delta^{(n)}(x)dx=p^n$$

所以 $\delta(x)$ 为积分方程

$$\int_0^\infty e^{-px}\phi(x)dx=1$$

的解。类似地

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)e^{i\omega x}dx=1$$

若 $\phi_s(x)$为在某一区域上的完备的直交函数系，则形式地有

$$\delta(x-y)=\sum_{s=1}^{\infty}\phi_s(x)\phi_s(y)$$

因为

$$\int\delta(x-y)\,f(y)\,dy=\int\sum_{s=1}^{\infty}\phi_s(x)\phi_s(y)f(y)dy$$

$$=\sum_{s=1}^{\infty}f_s\phi_s(x)$$

$$=f(x)$$

其中

$$\int f(y)\phi_s(y)dy = f_s$$

在这种意义下，$\delta(x-y)$是零阶叠核。

参 考 文 献

1. CHAMBERS, Ll. G. An Introduction to the Mathematics of Electricity and Magnetism (Chapman and Hall, London, 1973) p. 7.

2. WILLIAMS, I.P. Matrices for Scientists (Hutchinson, London, 1972)p. 57.

3. WILLIAMS, I. P. Op. cit. p. 62.

4. WILLIAMS, J. Laplace Transforms (George Allen and Unwin, London, 1973).

5. TITCHMARSH, E.C. Introduction to the Theory of Fourier Integrals (Oxford University Press, Oxford, 1937).

6. TRANTER, C. J. Integral Transforms in Mathematical Physics (Methuen, London, 1966).

7. MIKHLIN, S. G. Variational Methods in Mathematical Physics (Pergamon, Oxford, 1964)p.230.

深入学习文献

DELVES, L. M. and WALSH, J. (eds). Numerical Solution of Integral Equations (Oxford, 1974).

KANTOROVICH, L.V. and KRYLOV, V. I. Approximate Methods of Higher Analysis (Noordhoff, Groningen, 1958).

MIKHAILOV, L. G. A New Class of Singular Integral Equations (Wolters-Noordhoff, Groningen, 1970).

MIKHLIN, S.G. Integral Equations (Pergamon, Oxford, 1957).

MILLER, R.K Non Linear Volterra Integral Equations (W.A.Benjamin, Menlo Park, 1971).

POGORZELSKI. W. Integral Equations and their Applications (Pergamon, Oxford, 1966).

RIESZ, F. and SZ-NAGY, B. Functional Analysis (Blackie, Glasgow, 1956).

TITCHMARSH, E. C. Theory of Fourier Integrals (University Press, Oxford, 1937).

TRICOMI, F. G. Integral Equations (Interscience, New York, 1957).

WIDOM, H. Lectures on Integral Equations (Van Nostrand-Reinhold, New York, 1969).